

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gauss}$$

Polynom mit vorgegebener Basis

$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \dots, p_n(x) = x^n$
bilden eine Basis des $\mathbb{P}_n$. Man nennt diese Basis
 $\mathcal{M} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$
die **Monombasis**. Standardbasis der Polynome
Monombasis: $\mathcal{M} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
Eine weitere Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_3$ lautet:
 $\mathcal{B} = (p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)) = (1-x, 1+x, 1+x^2, 1-x^3)$.
Das Polynom $p(x) = 5 - 3x + 4x^2 + 2x^3$ ist ein Element vom $\mathbb{P}_3$.
Wir drücken dieses Polynom in den Basen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{B}$ aus:

• In der Basis $\mathcal{B}$:
Wir bilden eine Linearkombination:
 $p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)$
und suchen einen Wert für $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ und λ_3 .
Zunächst entwickeln wir die Linearkombination:
 $p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)$
 $= \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 (1+x) + \lambda_2 (1+x^2) + \lambda_3 (1-x^3)$
 $= \lambda_0 + \lambda_1 (1+x) + \lambda_2 (1+2x+x^2) + \lambda_3 (1+3x+3x^2+x^3)$
 $= (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3$
Durch Gleichsetzen erhält man:
 $5 - 3x + 4x^2 + 2x^3 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3$
Daraus folgt:

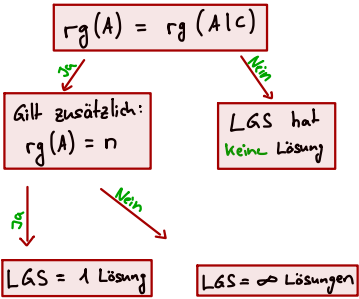
Könnte gleich so geschrieben werden polynom als Vektor!

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -3, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 4, \\ \lambda_3 = 2. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 5 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 5 + 5 - 2 - 2 = 10, \\ \lambda_1 = -3 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -3 + 4 - 6 = -5, \\ \lambda_2 = 4 - 3\lambda_3 = 4 - 6 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

Somit lautet die Linearkombination:
 $p(x) = 5 - 3x + 4x^2 + 2x^3 = 10 p_0(x) - 5 p_1(x) - 2 p_2(x) + 2 p_3(x)$

1. Gleichsetzen
2. Ausmultiplizieren
3. nach x, x^2, x^3 etc. Sortieren
4. LGS lösen, um die Koeffizienten zu ermitteln
5. Resultat: Nun kennt man die Linearkombination

Rang



- m = Anzahl Zeilen
- n = Anzahl Spalten
- Matrix ist in ZSF benötigt!
- Rang = rg = Zeilen mit den

Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist linear abhängig, wenn es nicht alle Null $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gibt, sodass: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$
sonst ist die Menge linear unabhängig

Prüfen Anleitung (also wie bei Basis vorgehen)

1. Vektoren als Spalten von Matrix schreiben (Matrizen/Polynom vorher als Vektor schreiben)
2. Gauß $\rightarrow$ ZSF
3. Führende Einsen (Pivot)
 $\hookrightarrow$ Freie Variabel = Linear Abhängig!
 $\hookrightarrow$ sonst unabhängig

Alternative bei Quadratischen Matrizen

$\det \neq 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Matrizen (korrekt)

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 = 0$$
$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Gauß - Jordan

Polynom (korrekt)

Beispiel $V = \mathbb{P}_2$
sind $p(x) = x^2 + 2x, q(x) = x - 1, r(x) = 2x^2 + 3x + 1$
lin. abhängig oder unabhängig?
Das heißt: Hat die Polynomgleichung
 $\lambda \cdot p(x) + \mu \cdot q(x) + \nu \cdot r(x) = 0$
Nur Nulllösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ oder Nullpolynom
nach mehr Lösungen?

$$\Rightarrow \lambda(x^2 + 2x) + \mu(x - 1) + \nu(2x^2 + 3x + 1) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$
$$\Rightarrow (\lambda + 2\nu)x^2 + (2\lambda + \mu + 3\nu)x - \mu + \nu = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 3\nu = 0 \\ -\mu + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ 2(-2\nu) + \mu + 3\nu = 0 \\ -\mu + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ -4\nu + \mu + 3\nu = 0 \\ -\mu + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ -\mu = -\nu \\ \mu = \nu \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{lin. abhängig}$$

Bild Prüfen

1. Abbildungsmatrix = A
2. Es gilt: $A\vec{z} = \vec{v}$
3. Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen (A|v)
4. Gauß - Jordan
5. Hat das LGS Lösungen?
 $\hookrightarrow$ Ja = $\vec{v}$ ist ein Bild!
 $\hookrightarrow$ Nein = ist keine Lösung von $\text{img}()$

Dimension = Anzahl Basisvektoren

$\mathbb{R}^3$ wird von den Basen } somit dim = 3
z.B. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gebildet } Anzahl B-Vektoren
z.B. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
 $\mathbb{R}^{n \times m} = \dim(\mathbb{R}^{n \times m}) = n \cdot m$
z.B. $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 3}) = 2 \cdot 3 = 6$
 $\mathbb{P}_n = \dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$
z.B. $\dim(\mathbb{P}_3) = 3 + 1 = 4$
weil die Konstante zur Dim gehört!
(und 3 für den Grad steht!)

Vektoren gegeben: Sagen welche dim

1. Vektoren als Spalten von Matrix schreiben (Matrizen/Polynom vorher als Vektor schreiben)
2. Gauß
3. Pivots zählen = dim
 $\hookrightarrow$ Freie Spalten ignorieren!
(A|0) in ZSF $\Rightarrow$ Rang = dim(A)

Koordinatenvektor

Gegeben: • Ein Vektorraum
• Eine Basis (Standardbasis)
• Ein Ziel Vektor

Wie viel mal braucht ich den Basisvektor B_1 und wie viel mal den Basisvektor B_2 um V zu bilden
Linearkombination von B_1 & B_2

Vorgehen

1. Komponenten Schreibweise mit v als Lösung
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Basis Basis $\vec{v}$
2. In Erweiterte Koeffizienten-Matrix
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$
3. Gauß - Jordan
 $\hookrightarrow$ so erhält man nun die Koeffizienten λ_1 & λ_2
4. λ_1 & λ_2 als Vektor schreiben
Notation
Ziel Vektor $v \rightarrow V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ← Koordinatenvektor
 $\uparrow$
zur Basis B

Abbildungseigenschaften

Situation	Formel	Matrixoperation
$f + g$	$A + B$	Zeilenweise addieren
$k \cdot f$	$k \cdot A$	Skalarmultiplikation
$\sum \lambda_i f_i$	$\sum \lambda_i A_i$	Kombination
$g \circ f$	$B \cdot A$	Matrixprodukt (A rechts!)
f^{-1}	A^{-1}	Inverse berechnen
Bijektiv?	$\det(A) \neq 0$	Oder Gauß: Rang = n

Allgemein gegeben für Eigenschaften

$$f(x) = A \cdot \vec{x}, \quad g(x) = B \cdot \vec{x}, \quad k, \lambda \in \mathbb{R}$$

Addition

$$(f+g) \cdot (\vec{x}) = (A+B) \cdot (\vec{x})$$

1. Abbildungsmatrizen A, B nebeneinander schreiben
2. Matrizen Elementweise addieren
↳ Ergebnis ist nun die neue Abbildungsmatrix = C
3. Nun jedes beliebige $\vec{x}$ mit C multiplizieren $C \cdot \vec{x}$

Skalarmultiplikation

$$(k \cdot f) \cdot (\vec{x}) = (k \cdot A) \cdot (\vec{x})$$

1. Faktor (k) mit Abbildungsmatrix k multiplizieren
↳ Ergebnis ist nun die neue Abbildungsmatrix = C
2. Nun jedes beliebige $\vec{x}$ mit C multiplizieren $C \cdot \vec{x}$

Verkettung / Komposition

$$(g \circ f) \cdot (\vec{x}) = B \cdot (A \cdot \vec{x}) = (B \cdot A) \cdot \vec{x}$$

$$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

1. Dimensionen prüfen (können A & B verkettet werden?)
2. Matrixmultiplikation $B \cdot A$ (Reihenfolge!)
↳ Ergebnis ist nun die neue Abbildungsmatrix = C

Inverse

$$f^{-1}(x) = A^{-1} \cdot (\vec{x})$$

1. Prüfe ob Abbildungsmatrix A invertierbar ist
↳ $\det(A) \neq 0$, Quadratische Matrix!
2. Inverse Matrix A^{-1} Berechnen
3. Nun $A^{-1} \cdot (\vec{x})$
↳ nun wird $y \mapsto x$ statt $x \mapsto y$ gerechnet
also wird rückwärts gerechnet!

Satz 2.3.3.

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit der $n \times n$ Darstellungsmatrix A.

- Die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\begin{aligned} f \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\} \text{ und } \text{Im}(f) = W \\ &\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \\ &\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

- Ist die lineare Abbildung f bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: W \rightarrow V$ linear und bijektiv. Die Darstellungsmatrix von f^{-1} ist A^{-1} , die Inverse zu A.

Kombination

$$\left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f_i \right) (x) = \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_i \right) \cdot x$$

1. Jede Matrix mit ihrem Skalar multiplizieren
↳ $k \cdot A =$ Skalarmultiplikation
2. Summe der neuen Abbildungsmatrizen
↳ $A+B =$ addition
↳ Ergebnis = neue Abbildungsmatrix = C
3. Wie gewohnt gilt nun $C \cdot \vec{x}$

Inverse berechnen A^{-1}

2x2 Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Allgemein: Gauss-Jordan (A|I)

I = Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
es gilt $A \cdot A^{-1} = I$

1. Schreibe A links und I rechts als Lösung
2. Gauss-Jordan
↳ links steht nun I = Einheitsmatrix
↳ rechts steht nun A^{-1}
3. Falls nicht möglich
↳ fehler gemacht
↳ A nicht invertierbar

Durchschnitt als Unterraum

Satz 1.2.2. Seien $U_1, \dots, U_n$ Unterräume eines Vektorraumes V, dann ist der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{k=1}^n U_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \quad \text{wieder ein Unterraum}$$

Beispiel 1.2.4. Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$$

tenz:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren liefert:

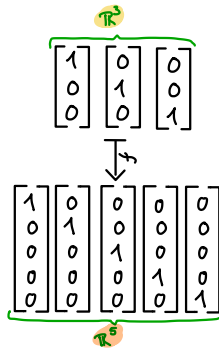
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Es folgt, dass die Variable z frei ist. Wir setzen $z = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist dann $x = -2\lambda$, $y = -\lambda$ und $z = \lambda$. Also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungsmenge des Systems lautet somit:

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

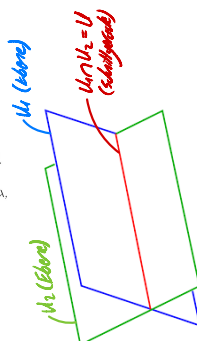


Welche Dimension hat die Abbildungsmatrix

$\mathbb{R}^{5 \times 3}$

inputvektor = Spalte = n
outputvektor = Zeilen = m

Eigenschaft	Bedeutung	Kriterium (einfach)	Bezug zur Matrix	Kern / Bild
Injektiv	Verschiedene Eingaben liefern verschiedene Ausgaben	Nur wenn n = m	Rang = Anzahl Spalten n	Kern = {0}
Surjektiv	Jede Ausgabe ist erreichbar	Nur wenn n = m	Rang = Anzahl Zeilen m	Bild = ganz $\mathbb{R}^m$
Bijektiv	1:1-Zuordnung, eindeutig & vollständig	Nur wenn n = m	Rang = n = m (volle Matrix)	Kern = {0}, Bild = $\mathbb{R}^m$
	Richtung	Dimensionen	Möglich? Injektiv?	Möglich? Surjektiv?
	$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$	n = 3, m = 2	✗ (nie möglich)	✓ (wenn Rang = 2)
	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	n = 2, m = 3	✓ (wenn Rang = 2)	✗ (nie möglich)
	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	n = m = 2	✓ (wenn Rang = 2)	✓ (wenn Rang = 2)



Geo. Transformation

Spiegelung an x, y-Achse

Operator	Illustration	Images of e_1 and e_2	Standard Matrix
Reflection about the x-axis $\hat{x}$ $T(x, y) = (x, -y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the y-axis $\hat{y}$ $T(x, y) = (-x, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y=x$ $T(x, y) = (y, x)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Spiegelung an einer Ebene durch Ursprung

$ax + by + cz = 0$

$$\frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$|\vec{n}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & -b^2 + a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Abbildungsmatrix
Spiegelung an Geraden $ax+by=0$ in Ebene

Spiegelung an Koordinatenebene im Raum

Operator	Illustration	Images of e_1, e_2, e_3	Standard Matrix
Reflection about the xy -plane $\hat{x}\hat{y}$ $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz -plane $\hat{x}\hat{z}$ $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz -plane $\hat{y}\hat{z}$ $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Orthogonale Projektion auf Achsen

Operator	Illustration	Images of e_1 and e_2	Standard Matrix
Orthogonal projection onto the x-axis $\hat{x}$ $T(x, y) = (x, 0)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the y-axis $\hat{y}$ $T(x, y) = (0, y)$		$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Orthogonale Projektion im Raum auf Ebene

Operator	Illustration	Images of e_1, e_2, e_3	Standard Matrix
Orthogonal projection onto the xy -plane $\hat{x}\hat{y}$ $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the xz -plane $\hat{x}\hat{z}$ $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection onto the yz -plane $\hat{y}\hat{z}$ $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Axiale Streckung/Stauchung in Ebene

Operator	Illustration	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Streckung Expansion in the x-direction $\hat{x}$ with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($0 \leq k < 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, 1)$ $(1, 0) \rightarrow (k, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (k, 1)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Streckung Expansion in the y-direction $\hat{y}$ with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($k > 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, k)$ $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (1, k)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Operator	$T(x, y) = (kx, y)$	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Compression in the y-direction $\hat{y}$ with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($0 \leq k < 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, k)$ $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (1, k)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansion in the y-direction $\hat{y}$ with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($k > 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, k)$ $(1, 0) \rightarrow (1, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (1, k)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Zentrische Streckung/Stauchung in Ebene

Operator	Illustration	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Contraction with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($0 \leq k < 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, k)$ $(1, 0) \rightarrow (k, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (k, k)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k in $\mathbb{R}^2$ ($k > 1$)		$(0, 1) \rightarrow (0, k)$ $(1, 0) \rightarrow (k, 0)$ $(1, 1) \rightarrow (k, k)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Bsp. 1
 $P(5,5)$
Spiegelung an der Geraden $-3x - y = 0$, gefolgt von einer Orthogonalprojektion auf die y-Achse.

1 Spiegelung (mit Formel)
 $\frac{1}{(-3)^2 + (-1)^2} \begin{bmatrix} -(-3)^2 + 1 & -2(-3)(-1) \\ -2(-3)(-1) & -(-1)^2 + 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

2 Orthogonale Projektion on y
→ Standardmatrix: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3 Ausrechnen
 $\vec{OP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

Bsp. 2
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A(1; -1), B(2; -1), C(2; 1)$ und $D(1; 1)$
Streckung um den Faktor $k=2$ längs der x-Achse.

1 Standardmatrix
→ $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{k=2} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2 Ortsvektor zu Matrix
 $M = (\vec{OA} \ \vec{OB} \ \vec{OC} \ \vec{OD}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 Ausrechnen
 $AM = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\vec{OA}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{OB}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{OC}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OD}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drehung um Nullpunkt in Ebene

Drehung im Gegenursinn
Drehung um Nullpunkt um 90°

1 Drehung
 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2 Drehung
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Drehung im Uhrzeigersinn mit negativem Winkel

Drehung um Achse im Raum

Operator	Illustration	Rotation Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ $\hat{x}$		$w_1 = x$ $w_2 = x \cos \theta - z \sin \theta$ $w_3 = x \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ $\hat{y}$		$w_1 = x \cos \theta + z \sin \theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ $\hat{z}$		$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ $w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bsp. 3

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix nach folgenden 2-dimensionalen Operationen:
Spiegelung an der Geraden $y - 2x = 0$, gefolgt von einer Drehung um den Winkel 60° .

1 Spiegelung (wie Bsp. 1)
 $\dots \rightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

2 Drehung
Standardmatrix:
 $\begin{pmatrix} \cos(60) & -\sin(60) \\ \sin(60) & \cos(60) \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} \cos(60) & -\sin(60) \\ \sin(60) & \cos(60) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3 Ausrechnen
 $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.9928 & -0.1196 \\ -0.1196 & 0.9928 \end{pmatrix}$

Scherung entlang Achse in Ebenen

Operator	Effect on the Unit Square	Standard Matrix
Shear in the x-direction by a factor k in $\mathbb{R}^2$ $\hat{x}$ $T(x, y) = (x + ky, y)$		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Shear in the y-direction by a factor k in $\mathbb{R}^2$ $\hat{y}$ $T(x, y) = (x, y + kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Basiswechsel

Satz 2.5.1.

Seien $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$ zwei Basen des Vektorraumes V und $P_{B \rightarrow C}$ die Basistransformationsmatrix von B auf C .

Dann gilt:

- $P_{B \rightarrow C} \vec{v}_B = \vec{v}_C$
- $P_{B \rightarrow C}$ ist eindeutig bestimmt.
- $P_{B \rightarrow C}$ ist invertierbar mit

$$\vec{v}_C = P_{B \rightarrow C} \cdot \vec{v}_B$$

$$P_{B \rightarrow C}^{-1} = P_{C \rightarrow B}$$

Neu	Alt

1. Gauss- Tabelle aufstellen

$$\text{Gesucht} = T A \rightarrow B$$

Alle Basis $\leftarrow$

$\rightarrow$ Neue Basis

2. Gauss- Jordan durchführen sodass linke Seite Einheitsmatrix steht $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Nun Koordinaten Vektor von alter Basis mit Matrix multiplizieren = Neu- Koordinatenvektor

Abbildungs Matrix A muss quadratisch sein!

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Satz 4.2.2.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

$A - \lambda I =$ charakteristische Matrix

Eigenwert = λ = Nullstellen

Eigenvektor = $\vec{x}$

Eigenraum = Menge aller Eigenvektoren $\propto$ Vektoren.

Eigenwert = ∞ Eigenvektoren

Eigenvektor = 1 Eigenwert

Eigenraum = alle Eigenvektoren = Unterraum

Eigenraum

$$(A - \lambda \cdot I) \vec{x} = 0$$

- Freie Variablen bestimmen
- Lösungsmenge $\text{Lin}()$
- Dim bestimmen

Prüfen ob Vektor $\vec{v}$ ein Eigenvektor ist

1. Matrix A und Vektor $\vec{v}$ aufschreiben

2. Bildvektor berechnen

$$\rightarrow A \cdot \vec{v}$$

3. Vergleich von $A \vec{v}$ mit $\lambda \vec{v}$

$\rightarrow$ Vielfaches? $\rightarrow$ Nein = kein Eigenvektor

$\rightarrow$ Ja = Eigenvektor = λ = Vielfaches

Multipliziere die Matrix mit dem Vektor:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Vergleiche $A \cdot \vec{v}$ mit $\lambda \cdot \vec{v}$

Frage: Ist der Bildvektor ein Vielfaches des ursprünglichen Vektors?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Ja = Eigenvektor

$\rightarrow$ Eigenwert $\lambda = 3$

Hauptdiagonale

$$\text{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

$$\text{Spur}(A) = \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \dots + \mu_k \lambda_k = \sum_{j=1}^k \mu_j \lambda_j$$

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \cdot \dots \cdot \lambda_k^{\mu_k}$$

Satz

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann gilt:

- Ist λ ein Eigenwert von A und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zum λ , dann ist λ^k ein Eigenwert von A^k und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zum λ^k .
- A ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Eigenwerte von A Null verschieden sind.
- Ist λ ein Eigenwert und A invertierbar, dann ist der Kehrwert $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert der inversen Matrix A^{-1} .

$$A^{-1} \vec{x} = \frac{1}{\lambda} \vec{x}$$

$$A = P D P^{-1}$$

Geometrische Vielfachheit = Anzahl Dimension Eigenraums = γ

Algebraische Vielfachheit = Anzahl wie oft λ als Nullstelle = μ

$$1 \leq \gamma \leq \mu$$

Spektrum = Menge der Eigenwerte = σ

Spektralradius = größter Betrag $|\lambda|$ der Eigenwerte = ρ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ad-bc})$$

Symmetrische Matrizen

$$A^T = A$$

geometrische = algebraische Vielfachheit

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spezielle Abbildungsmatrizen

Dreiecksmatrizen & Diagonalmatrizen
• Eigenwerte = Hauptdiagonale

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -1$$

Eigenwerte der Matrix A

1. Bilde $A - \lambda I$ $\rightarrow -\lambda$ auf der Hauptdiagonalen

2. Berechne $\det(A - \lambda I)$

$\rightarrow$ Nicht ausmultiplizieren

$\rightarrow$ wenn möglich ausklammern

3. Nullstellen von $\det(A - \lambda I)$

4. Kontrolle

$\rightarrow$ Spur = Summe von Eigenwerte
 $\rightarrow$ Summe Hauptdiagonale



Eigenvektoren der Matrix A

1. Finde alle Eigenwerte λ

2. Berechne $A - \lambda \cdot I$

$\rightarrow$ Für jeden Eigenwert rechnen

$\rightarrow$ also λ in $A - \lambda \cdot I$ einsetzen

3. Löse $(A - \lambda \cdot I) \vec{x} = 0$

$\rightarrow$ Gauss

4. Lösungsmenge $\Rightarrow$ Komponenten S.-weise

Ähnlichkeit

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow \boxed{AP = PB} \quad \begin{matrix} A & P & P & B \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Gesucht wird also die Matrix P welche Invertierbar ist

0.1 $\det(A) = \det(B)$?

↳ Nein = Sie sind sicher nicht ähnlich
Ja = Ähnlichkeit ist möglich

0.2 Charakteristisches Polynom ermitteln

↳ $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$
↳ Nein = Sie sind sicher nicht ähnlich
Ja = Ähnlichkeit ist möglich

1. Matrix-Gleichung $AP = PB$ aufstellen

2. Matrizen ausmultiplizieren

3. Gleichungssystem aufstellen

↳ Elemente $a_{11} = b_{11}$
 $a_{12} = b_{12}$

4. Gleichungssystem lösen

5. Wenn vorhanden freie Werte z.B. a & b mit geeigneten Zahlen festlegen
↳ $\det \neq 0$

6. die nun festen Zahlen in Matrix P eintragen

7. Matrix P auf Invertierbarkeit prüfen

↳ Ja = Ähnlich
↳ Nein = nicht ähnlich

Satz 4.5.1:
Seien A und B ähnliche $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:
• Ihre Determinante stimmen überein: $\det(A) = \det(B)$.
• A ist genau dann invertierbar, wenn B invertierbar ist.
• A und B haben das gleiche charakteristische Polynom.
• A und B haben die gleichen Eigenwerte.

Ähnliche Matrizen haben:

- den gleichen Charakteristischen Polynom,
- die gleichen Eigenwerte (inkl. Vielfachheiten),
- die gleiche Spur und Determinante.

Diagonalisierbar

$$A = PDP^{-1}$$

$$\boxed{AP = PD}$$

$$P^{-1}AP = D$$

1. Eigenwerte berechnen

↳ $\det(A - \lambda I) = 0$

2. Eigenräume berechnen (Eigenvektore)

↳ $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$

3. Lineare Unabhängigkeit prüfen

↳ gibt es n unabhängige Eigenvektoren?
↳ Ja = Diagonalisierbar

4. Matrix P erstellen

↳ Eigenvektoren als Spalten

5. Matrix D erstellen

↳ Eigenwerte in der korrekten Reihenfolge auf Hauptdiagonale in Bezug zur Reihenfolge der Eigenvektoren als Spalten

6. Kontrolle

↳ $A \cdot P = P \cdot D$

A hat EW $\lambda = 2$ mit EV $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
und EW $\mu = -1$ mit EV $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ mit $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- EW beide reell, beide algebraisch und geometrisch Vielfachheit 1.
- A ist diagonalisierbar mit:

$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Kartesische Form → Polarform / Euler

$$z = a + bi \rightarrow z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] / re^{i\varphi}$$

1. Betrag r berechnen

↳ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Winkel berechnen

↳ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + k \cdot 180$

(2.) Korrekturparameter k bestimmen

Vorzeichen von a und b beachten um den Quadranten zu bestimmen

1. Quadrant → k = 0
2. Quadrant → k = 1
3. Quadrant → k = 1
4. Quadrant → k = 2

3. In Polarform notieren

4. Spezialfall rein Imaginär

↳ $z = bi$, $z = -bi$ Imaginäre Achse (y-Achse)
30° 270° Formel nicht anwendbar für Winkel-Bestimmung

↳ $z = a$, $z = -a$ Reelle Achse (x-Achse)
0° 180°

Euler / Polarform → Kartesische Form

$$re^{i\varphi} / z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] \rightarrow z = a + bi$$

1. $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ berechnen

↳ Taschenrechner

2. Real- und Imaginärteil bestimmen

↳ $a = r \cdot \cos(\varphi)$, $b = r \cdot \sin(\varphi)$

3. In kartesischer Form notieren

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + bi$	$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$	$z = re^{i\varphi}$
$a = r \cos(\varphi)$	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$	
$b = r \sin(\varphi)$	mit $\Delta = \begin{cases} 0^\circ, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180^\circ, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

Eulersche Form

$$z = re^{i\varphi} = r[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$$

Addition / Subtraktion

Nur in Kartesischer Form!

Potenzen

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Konjugiert $\bar{z}$

$$\bar{z} = re^{-i\varphi} = re^{i\varphi}$$

Satz 4.5.3.

Eine $n \times n$ quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. A hat n linear unabhängigen Eigenvektoren
2. A hat n verschiedene Eigenwerte
3. Für jeden Eigenwert λ von A gilt: $\gamma_\lambda = \mu_\lambda$
4. A ist reell und symmetrisch

- $n \times n$ Matrix A
- n unabhängige Eigenvektoren
- Diagonalelemente von $A = D$
- $\mu = \gamma$ geometrisch v.h. = algebraische v.h.

Symmetrische Matrizen sind immer Diagonalisierbar

Multiplikation

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Kartesische Form

$i^2 = -1$

$z = \frac{1}{2} = -i$

$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$

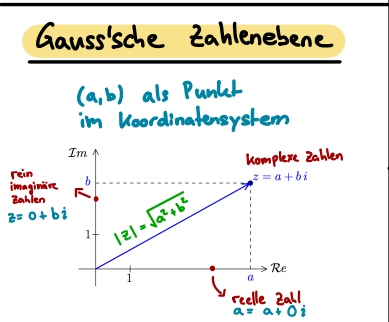
$i = \sqrt{-1}$

Reellteil $\text{Re}(z)$

$z = a + bi$

Kartesische Form

Imaginärteil $\text{Im}(z)$



Zyklisch!

$i^1 = i = 1$

$i^2 = -1 = 2$

$i^3 = -i = 3$

$i^4 = 1 = 0$

Exponent mit 4 dividieren dann Rest ermitteln

Exponent mod 4

also rest betrachten

Satz

Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen

Für beliebige komplexe Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. $z_1 z_2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

3. $\bar{\bar{z}} = z$

4. $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Inverse

Konjugiert komplexe Zahl $= \bar{z}$

$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} (a - bi)$

$a^2 + b^2$

Eigenschaften

Satz 3.3.2.

Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $|\lambda z| = |\lambda| |z|$

2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

4. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Summe

Definition 3.3.1.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen, dann ist die Summe von z_1 und z_2 :

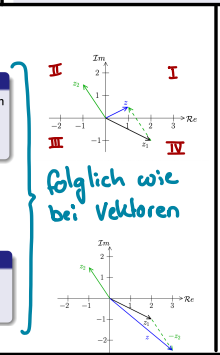
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Differenz

Definition 3.3.2.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$, dann ist die Differenz:

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$



Multiplikation

Definition 3.3.3.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen. Dann ist das Produkt $z_1 z_2$:

$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Spezialfall

$\lambda z = \lambda a + \lambda b i$

Neutralelement

$1 + 0 i$

Division

Definition 3.3.5.

Der Quotient von $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ mit $z_2 \neq 0$:

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} z_1 \bar{z}_2 = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$

$a_1^2 + b_1^2$

Die Formel muss nicht verwendet werden.

Es kann auch einfach aufmultipliziert werden

Achtung $i^2 = -1$

Polarform

1. Winkel $\varphi = \text{Arg}(z)$ $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ)$

2. Abstand $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) i$

$= r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

Der Winkel gibt die Drehrichtung an. Ausgehend von der positiven reellen Achse

$+\varphi$ = Gegenuhzeigersinn

$-\varphi$ = im Uhrzeigersinn

Addition / Subtraktion

Nur in Kartesischer Form!

Multiplikation

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Potenzen

$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

Konjugiert $\bar{z}$

$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))$

Die Art der Wurzeln hängt dabei vom Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab:

$D > 0$: zwei verschiedene reelle Wurzeln: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0$: eine doppelte reelle Wurzel: $z_{1,2} = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: zwei konjugiert komplexe Wurzeln:

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{D} i$

Somit: $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{D} i$ und $z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{D} i = \bar{z}_1$

n-ten Wurzeln

$z^n = a = a_0 e^{i\alpha}$

Definition 3.3.1.

Eine komplexe Zahl z wird als n -te Wurzel aus a bezeichnet, wenn sie der algebraischen Gleichung

$z^n = a$

genügt ($a \in \mathbb{C}$).

Symbolische Schreibweise: $z = \sqrt[n]{a}$.

alle Wurzeln müssen in den Einheitskreis gezeichnet werden

3. Radius anpassen

$\hookrightarrow r_k = \sqrt[n]{a_0} (= \sqrt[n]{r_1})$

4. Wurzelwinkel φ_k bestimmen

$\hookrightarrow \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$

5. In Formel einsetzen

$z_k = r_k e^{i\varphi_k} = r_k (\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k))$

mit $k = 0$ beginnend!

Nullstellen ermitteln (Quadratisch)

1. Polynomdivision

$\hookrightarrow$ gibt die reelle Nullstelle

2. Komplexe Nullstellen ermitteln

$\hookrightarrow$ Quadratische Gleichung lösen mit komplexen Zahlen

1. Radius bestimmen

$\hookrightarrow r_k = \sqrt{a^2 + b^2} = a_0$

2. Winkel α bestimmen

Euler Form

Der Parameter k dient als Zähler

$k=0$ ist die erste Nullstelle

$k=1$ ist die zweite Nullstelle ...

Wurzeln

Ein Polynom n -ten Grades besitzt n Lösungen. Als Lösung bezeichnet man die Wurzel. Somit gibt es genau n Wurzeln, wobei mehrfache Wurzeln mehrfach gezählt werden.
 reelle Wurzeln + komplexe Wurzeln = n Wurzeln

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Spur von A : $\text{Spur}(A) = 0 + (-1) + 3 = -1 + 3 = 2$.
 Summe der Hauptdiagonale

$\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 4 - 2 = 2 = \text{Spur}(A)$.
 mit Vielfachheit k λ

Somit: $\det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 2)(4 - \lambda^2) = (\lambda - 2)(2 - \lambda)(2 + \lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$
 Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I_3) = 0$ lauten somit:
 $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$
 Die zugehörige algebraische Vielfachheit: $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 1$

Spektrum von A : $\sigma(A) = \{2, -2\}$

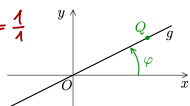
Spektralradius von A : $\rho(A) = \max(|2|, |-2|) = 2$.

$$\lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} = 2^2 \cdot (-2)^1 = -8 = \det(A)$$

Gleichung der Geraden unbekannt aber Winkel bekannt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ kürzt sich $= \frac{1}{1}$



$$A_g = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$