

Maschinendynamik

fischal

Version: January 22, 2026

Umrechnungen:

$$n\left[\frac{1}{\min}\right] = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right], \quad \text{Grad} = \text{Rad} \cdot \frac{180}{\pi}, \quad F_{\text{Zentrif.}} = \frac{mv^2}{r}$$

Freie Schwingungen

Ort:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$x(t) = C \cdot e^{\lambda t} = e^{-\delta t} \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

$$x(t) = e^{-\delta t} (A \cos(\omega \sqrt{1-D^2}t) + j B \sin(\omega \sqrt{1-D^2}t))$$

Geschwindigkeit:

$$\dot{x}(t) = -\delta e^{-\delta t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t))$$

$$+ e^{-\delta t} (-\omega_d A \sin(\omega_d t) + \omega_d B \cos(\omega_d t))$$

Definitionen:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\text{Steifigkeit}}{\text{Trägheit}}} = \pm \sqrt{\frac{c}{\theta}}$$

$$\delta = \frac{d}{2\theta} = \frac{\text{Dämpfung}}{2 \cdot \text{Trägheit}}$$

$$F_{\text{Feder}} = c \cdot x$$

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{d}{2 \cdot \sqrt{\theta \cdot c}}$$

$$F_{\text{Dämpfer}} = d \cdot \dot{x}$$

$$\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1-D^2}$$

$$\sin x \approx x$$

$$T = \frac{1}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Steifigkeiten verschiedener Lastfälle: Allgemein: $\delta =$ Beispiel 4:

(Verschiebung) $= \frac{F}{c}$



$$c_b = \frac{EA}{l}$$



$$c_b = \frac{3EI}{l^3}$$



$$c_b = \frac{48EI}{l^3}$$



$$c_b = \frac{M_0}{\varphi} = \frac{EI}{l}$$



$$c_b = \frac{192EI}{l^3}$$



$$c_b = \frac{96EI}{l^3}$$

Balken einseitig eingespannt, konstante Flächenlast:

$$c_b = \frac{8EI}{L^3}$$

Serie- und Parallelschaltung von c

Parallelschaltung:

"Wenn ich eine Feder festhalte, schwingt das System nicht weiter"

$$c_{ges} = \sum c$$

Serienschaltung:

"Wenn ich eine Feder festhalte, schwingt das System weiter"

$$c_{ges} = \left(\sum \frac{1}{c_n}\right)^{-1} = \frac{c_n \cdot c_{n+1}}{c_n + c_{n+1}}$$

Beispiele

Beispiel 1:

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Frequenz:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Beispiel 2:

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + 2cx = 0$$

Frequenz:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2c}{m}}$$

Beispiel 3:

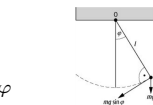
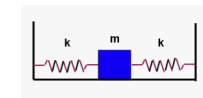
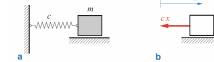
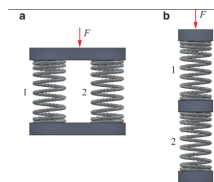
Bewegungsgleichung:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$$

kleine Auslenkungen: $\sin \varphi \approx \varphi$

Frequenz:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

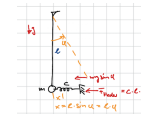


Bewegungsgleichung

$$ml^2 \ddot{\varphi} + (mgl + cl^2) \varphi = 0$$

Frequenz

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{mgl + cl^2}{ml^2}}$$



Systeme mit Dämpfung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$$

$$D = \frac{d}{d_{\text{Krit.}}}$$

$$d_{\text{Krit.}} = 2 \cdot \sqrt{c \cdot \theta} = 2 \cdot \sqrt{\text{Trägheit} \cdot \text{Steifigkeit}}$$

Realteil: Abklingfunktion (Amplitudenabnahme)

Imaginärteil: Harmonische Funktion (Kreisfrequenz ω)

Dämpfungsarten:

Schwach Gedämpft $\rightarrow D < 1$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega \sqrt{1-D^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm j\omega_d$$

Stark Gedämpft $\rightarrow D > 1$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}$$

System nimmt langsamer ab als Kritisch Gedämpft, schwingt aber auch nicht.

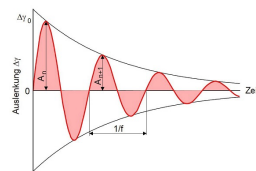
Kritisch Gedämpft $\rightarrow D = 1$

$$\lambda_{1,2} = -\delta$$

$$d = d_{\text{Krit.}} = 2 \cdot \sqrt{\theta \cdot c}$$

Logarithmisches Dekrement

Experimentelle bestimmung von D (Messung).



$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+T}} \right)$$

$$x(t) = x_0 e^{-D\omega_0 t}$$

$$\delta = D\omega_0 T_d, \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$2\pi D = \Lambda$$

$$\delta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}, \quad D = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Erzwungene Schwingungen

Ohne Dämpfung

$$f(t) = F \cos(\Omega t) = F e^{j\Omega t} = m\ddot{x} + cx$$

mit Lösungsansatz:

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t) \quad \text{oder} \quad X \cdot \cos(\Omega t - \phi)$$

Definitionen:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

Argument/Amplitude:

$$V = \frac{X}{X_0} = \frac{E}{1-\eta^2}$$

E = 1 für Erregung durch Feder

E = η^2 für Erregung durch Unwucht

E = $2D\eta$ für Erregung durch Dämpfer

Mit Dämpfung

$$f(t) = F \cos(\Omega t) = F e^{j\Omega t} = m\ddot{x} + d\dot{x} + cx$$

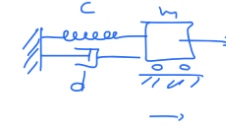
Phase/Frequenzgang:

$$\tan(\phi) = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

Argument/Amplitude:

$$\left| \frac{X}{X_0} \right| = \frac{E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Erregung durch Feder:



$$f(t) = F \cos(\Omega t)$$

$$E = 1$$

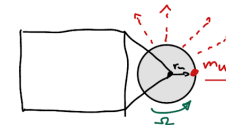
$$X_0 = \frac{F}{c}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

$$\eta_{\text{max}} = \sqrt{1-2D^2}$$

$$V_1(0) = 1; V_1(1) = \frac{1}{2D}; V_1(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

Erregung durch Unwucht:



$$f_c = m_u \cdot r_u \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t)$$

$$E = \eta^2$$

$$X_0 = \frac{m_u r_u}{m}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

$$\eta_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{1-2D^2}}$$

$$V_2(0) = 0; V_2(1) = 1; V_2(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

Erregung durch Dämpfer:



$$f(t) = F \cos(\Omega t)$$

$$E = 2D\eta$$

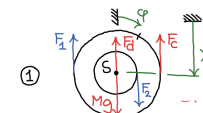
$$X_0 = \frac{F}{c}$$

$$V_{\text{max}} = 1$$

$$\eta_{\text{max}} = 1$$

$$V_3(0) = 0; V_3(1) = \frac{1}{2D}; V_3(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$$

a) Freischnitten



Kinematik

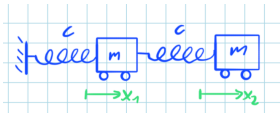
$$\dot{\gamma} = 2R\dot{\varphi} \quad (1)$$

$$\dot{z} = 3R\dot{\varphi} \quad (2)$$

$$\dot{z} = \frac{3}{2} \dot{\gamma} \quad (3)$$

$$\dot{z} = \frac{3}{2} \dot{\gamma} \quad (4)$$

Systeme mit n Freiheitsgraden



Bewegungsgleichungen:
(für jeden Freiheitsgrad eine)

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Matrix-Vektor Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{Massenmatrix } M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\text{Beschleunigung}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix } K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{Verschiebung}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Eingangsgröße}}$$

$$M \ddot{x} + K x = 0$$

Berechnung der Eigenfrequenzen ω durch Eigenwertproblem:

$$\det(K - \lambda \cdot M) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\lambda}$$

Moden der Bewegung (Eigenvektoren):

$$(K - \lambda_{1/2} \cdot M) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

- Gleichungssystem mit jedem einzelnen Eigenvektor aufstellen
- Gleichungssystem nach x_2 auflösen
- Verhältnis = Eigenvektor, **Achtung: Eigenv. sind skalierbar**
- Bsp: $x_2 = x_1 \cdot 2$

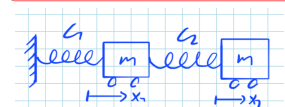
$$[R_1] = EV_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Mode 1:** Gleiche Vorzeichen: System **schwingt in gleiche** Koordinatenrichtung
- Mode 2:** Unterschiedliche Vorzeichen: System **schwingt in gegensätzliche** Koordinatenrichtung

Eingabe im Taschenrechner

- M:= [...] oder Menü 7-1-1
- K:= [...] oder Menü 7-1-1
- a:= $K - \lambda \cdot M$
- solve(det(a)=0, λ) (Menü 3-1)
Ergebn $\pm \lambda_{1,2}$
- $\omega = \sqrt{\lambda} \rightarrow$ Eigenfrequenzen
- $a_{\text{neu}} := K - \lambda_{1,2} \cdot M$
- $R_1 = \text{eigVc}(a)$ oder Menü 7-B-5

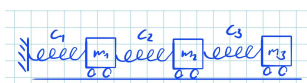
Spezialfälle:



$$\text{wenn } c_1 \gg c_2 \Rightarrow \omega^2 \approx \frac{c_2}{m}$$

$$\text{wenn } c_1 \ll c_2 \Rightarrow \omega^2 \approx \frac{c_1}{2m}$$

System mit 3 Freiheitsgraden:



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Festigkeitslehre/Trigonometrie

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	Nst.
grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$k\pi$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	$k\pi$
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	$\frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) & \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) & \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ e^{2ix} &= \cos(2x) + i \sin(2x) & e^{-2ix} &= \cos(2x) - i \sin(2x) \\ \sec x &= \frac{2 \cos x}{\cos(2x) + 1} \end{aligned}$$

Grundgesetze:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

σ = Normalspannung

γ = Schubdehnung

τ = Schubspannung

G, E, ν = Materialkonstanten

Biegung:

$$\tau_{max} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{M_b}{I_y} \cdot z_{max}$$

$$M_b = F_z \cdot L, \quad F_z = \frac{3EI}{L^3} \cdot x \quad (\text{Balken, } F \text{ am Ende})$$

σ_{max} : max. Biegespannung [MPa]

M_b : Biegemoment [Nm]

W_b : Biege Widerstandsmoment [m^3]

I : Flächenträgheitsmoment um $y[m^4]$

z_{max} : Abstand Rand - Neutralachse [m]

F_z : Quer/Biegekraft in z [N]

L : Balkenlänge [m]

x : Durchbiegung am freien Balkenende [m]

Biegedifferenzialgleichung:

$$EIw^{(4)} = q = q_0$$

$$EIw''' = -Q = q_0 x + C_1$$

$$EIw'' = -M = \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EIw' = \frac{1}{6}q_0 x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EIw = \frac{1}{24}q_0 x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

Torsion:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_{max}$$

$$M_t = c_T \cdot \varphi$$

$$c_T = \frac{GI_p}{L}$$

I_p = Polares Flächenträgheitsmoment

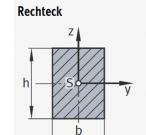
M_t : Torsionsmoment [MPa]

r : Abstand zur Wellenachse [m]

φ : Verdrehwinkel

c_T : Torsionssteifigkeit (Feder)

Axiale Flächenträgheitsmomente:

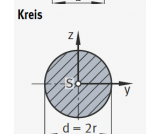


$$I_y = \frac{bh^3}{12} = A \frac{h^2}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = A \frac{b^2}{12}$$

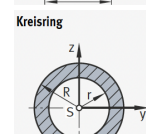
$$W_y = \frac{bh^2}{6} = A \frac{h}{6}$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = A \frac{b}{6}$$



$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} = A r^2$$

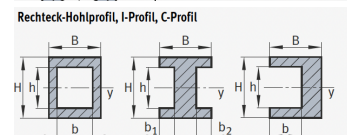
$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4} = A r$$



$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$= \pi/64 \cdot (D^4 - d^4)$$

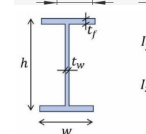
$$W_y = W_z = \frac{\pi}{4} \frac{(R^4 - r^4)}{R}$$



$$I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

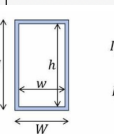
$$W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

$$\text{mit } b = b_1 + b_2$$



$$I_y = \frac{wh^3}{12} - \frac{(w-t_w)(h-2t_w)^3}{12}$$

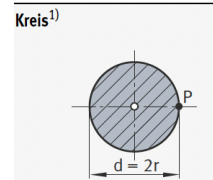
$$I_z = \frac{hw^3}{12} - \frac{(w-t_w)^3(h-2t_w)}{12}$$



$$I_y = \frac{WH^3 - wh^3}{12}$$

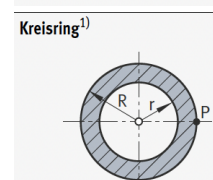
$$I_z = \frac{HW^3 - hw^3}{12}$$

Polare Flächenträgheitsmomente



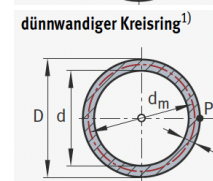
$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$$



$$I_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

$$W_p = \frac{\pi}{2} \frac{(R^4 - r^4)}{R}$$

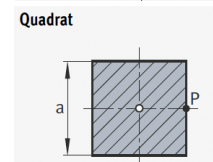


$$\frac{D}{d} < 1,2$$

$$d_m = \frac{D+d}{2}$$

$$I_p = \frac{\pi}{4} d_m^3 s$$

$$W_p = \frac{\pi}{2} d_m^2 s$$



$$I_t = 0,141 a^4$$

$$W_t = 0,208 a^3$$

Festigkeitslehre

System	Gleichung der elastischen Linie w(x)	W_{max}
	$w_I = \frac{F_z \cdot l^3}{6 E \cdot I_y} \left(2 \frac{a \cdot x}{l^2} - 3 \frac{a^2 \cdot x}{l^3} + \frac{a^3 \cdot x}{l^4} + \frac{a \cdot x^3}{l^4} - \frac{x^3}{l^3} \right)$ $w_{II} = \frac{F_z \cdot l^3}{6 E \cdot I_y} \left(\frac{a^3}{l^3} + 2 \frac{a \cdot x}{l^2} - \frac{a^3 \cdot x}{l^4} - 3 \frac{a \cdot x^2}{l^3} + \frac{a \cdot x^3}{l^4} \right)$	$w(a) = \frac{F_z \cdot a^2 \cdot b^2}{3 E \cdot I_y \cdot l}$ $a > b$ $w_{I, max}$ bei $x = l \cdot \sqrt{\frac{2a}{3l} - \frac{a^2}{3l^2}}$ $a < b$ $w_{II, max}$ bei $x = l - l \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{a^2}{3l^2}}$
	$w_I = \frac{F_z \cdot l^3}{6 E \cdot I_y} \left(\frac{a \cdot x}{l^2} - \frac{a^2 \cdot x}{l^3} - \frac{x^3}{a \cdot l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right)$ $w_{II} = \frac{F_z \cdot l^3}{6 E \cdot I_y} \left(\frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a \cdot x}{l^2} + \frac{a^2 \cdot x}{l^3} + 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$w_{I, max} = \frac{\sqrt{3} \cdot F_z \cdot a^2 \cdot b}{27 E \cdot I_y}$ $w_{II, max} = \frac{F_z \cdot l \cdot b^2}{3 E \cdot I_y}$
	$w = \frac{F_z \cdot l^3}{6 E \cdot I_y} \left(3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$w_{max} = \frac{F_z \cdot l^3}{3 E \cdot I_y}$
	$w_I = \frac{M_y \cdot l^2}{6 E \cdot I_y} \left(6 \frac{a \cdot x}{l^2} - 2 \frac{x}{l} - 3 \frac{a^2 \cdot x}{l^3} - \frac{x^3}{l^3} \right)$ $w_{II} = \frac{M_y \cdot l^2}{6 E \cdot I_y} \left(-3 \frac{a^2}{l^2} + 2 \frac{x}{l} + 3 \frac{a^2 \cdot x}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right)$	$w_{I, max} = \frac{M_y \cdot l^2}{3 E \cdot I_y}$ $\left(-\frac{2}{3} + \frac{2a}{l} - \frac{a^2}{l^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ $w_{II, max} = \frac{M_y \cdot l^2}{3 E \cdot I_y} \left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{l^2} \right)^{\frac{3}{2}}$
	$w_I = \frac{M_y \cdot l^2}{6 E \cdot I_y} \left(\frac{a \cdot x}{l^2} - \frac{x^3}{a \cdot l^2} \right)$ $w_{II} = \frac{M_y \cdot l^2}{6 E \cdot I_y} \left(\frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a \cdot x}{l^2} + 3 \frac{x^2}{l^2} \right)$	$w_{I, max} = \frac{\sqrt{3} \cdot M_y \cdot a^2}{27 E \cdot I_y}$ $w_{II, max} = \frac{M_y \cdot l^2}{6 E \cdot I_y} \left(3 - \frac{4a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$
	$w = -\frac{M_y}{2 E \cdot I_y} x^2$	$w_{max} = \frac{M_y \cdot l^2}{2 E \cdot I_y}$
	$w = \frac{q_z \cdot l^4}{24 E \cdot I_y} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$w_{max} = \frac{5 q_z \cdot l^4}{384 E \cdot I_y}$
	$w_I = \frac{q_z \cdot l^4}{24 E \cdot I_y} \left(-2 \frac{a \cdot x}{l^2} + 4 \frac{a^2 \cdot x}{l^3} - \frac{a^3 \cdot x}{l^4} + \frac{x^3}{a \cdot l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$ $w_{II} = \frac{q_z \cdot l^4}{24 E \cdot I_y} \left(2 \frac{a^2}{l^2} - 8 \frac{a \cdot x}{l^2} + 4 \frac{a^2 \cdot x}{l^3} - \frac{a^3 \cdot x}{l^4} + 6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$w_{II, max} = \frac{q_z \cdot l^4}{24 E \cdot I_y} \left(3 - 8 \frac{a}{l} + 6 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3} \right)$
	$w = \frac{q_z \cdot l^4}{24 E \cdot I_y} \left(6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$w_{max} = \frac{q_z \cdot l^4}{8 E \cdot I_y}$

a) $\vec{u} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3$

⊖ $\vec{u}_1 + c_1 \vec{u}_1 + c_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$ ⊕ $\vec{u}_2 = -c_1 \vec{u}_2 - c_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$

⊖ $\vec{u}_1 + c_1 \vec{u}_1 - c_2 \vec{u}_2 + c_2 \vec{u}_1 = 0$ ⊖ $\vec{u}_2 + c_1 \vec{u}_2 - c_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = 0$

⊖ $\vec{u}_1 + c_1 (c_1 + c_2) + c_2 \cdot (-c_2) = 0$ ⊖ $\vec{u}_2 + c_1 (-c_2) + c_2 (c_1 + c_2) = 0$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$