

Maschinendynamik

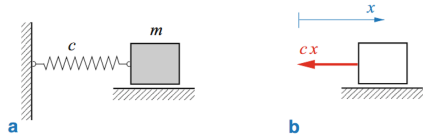
Fabian Starc

Version: January 21, 2026

Einteilung schwingender Systeme

	ungedämpfte Systeme	gedämpfte Systeme
freie Schwingungen	1FG, nFG Variante 1	1FG, nFG Variante 2
erzwungene Schwingungen	1FG, (nFG) Variante 3	1FG, (nFG) Variante 4

Variante 1: freie Schwingung, ungedämpftes System



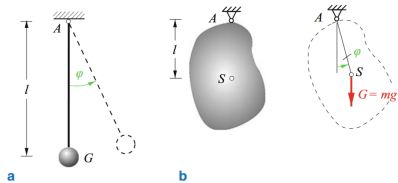
Bewegungsgleichung:

Trägheit $\times$ Beschleunigung + Steifigkeit $\times$ Verschiebung = 0

$$m\ddot{x} = \Sigma F_i \quad \Theta \ddot{\varphi} = \Sigma M_i$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\text{Steifigkeit}}{\text{Trägheit}}} = \pm \sqrt{\frac{c}{m}}$$



$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

$$\varphi(t) = \cos(\omega t)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\text{Steifigkeit}}{\text{Trägheit}}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bedingungen für Schwingungen

gegeben:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{C_{eff}}{M_{eff}}}$$

Fall 1:

$$C_{eff} > 0$$

$$\omega \in \mathbb{R}$$

Schwingungen wenn Steifigkeitsterm Positiv

Fall 2:

$$C_{eff} < 0$$

$$\omega \in \mathbb{C}$$

keine Schwingungen

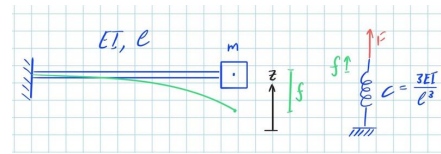
Fall 3:

$$C_{eff} = 0$$

$$\omega = 0$$

keine Schwingungen

Schwingender Kragbalken



Kragbalken-Masse-System kann durch Feder-Masse-System ersetzt werden.

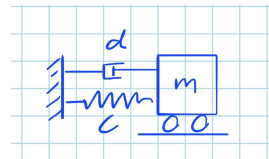
$$f = \frac{Fl^3}{3EI} \quad F = \frac{3EI}{l^3} \cdot f$$

$$\text{Federkonstante: } c = \frac{3EI}{l^3}$$

Variante 2: freie Schwingung, gedämpftes System

Bewegungsgleichung:

Trägheit $\times$ Beschleunigung + Dämpfung $\times$ Geschwindigkeit + Steifigkeit $\times$ Verschiebung = 0



$$m\ddot{x} = \Sigma F_i$$

$$\underbrace{m}_{\text{Trägheit}} \ddot{x} + \underbrace{d}_{\text{Dämpfung}} \dot{x} + \underbrace{c}_{\text{Steifigkeit}} x = 0$$

Ansatzfunktion:

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} (\cos(\omega_d t) + \sin(\omega_d t))$$

Ansatzfunktion für Geschwindigkeit:

$$\dot{x}(t) = A e^{-\delta t} \left[-\delta (\cos(\omega_d t) + \sin(\omega_d t)) + \omega_d (\cos(\omega_d t) - \sin(\omega_d t)) \right]$$

$$\frac{d}{m} = 2\delta = 2D\omega$$

$$D = \frac{\delta}{\omega}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

$$D = \frac{\text{Dämpfung}}{2\sqrt{\text{Trägheit} \times \text{Steifigkeit}}}$$

$$\delta = \frac{\text{Dämpfung}}{2 \cdot \text{Trägheit}}$$

Dämpfungsarten:

Schwach Gedämpft $\rightarrow D < 1$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega \sqrt{1 - D^2} \quad \lambda_{1,2} = -D\omega \pm i\omega_d$$

Stark Gedämpft $\rightarrow D > 1$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}$$

Kritisch Gedämpft $\rightarrow D = 1 \rightarrow D = \frac{d}{d_{krit}}$

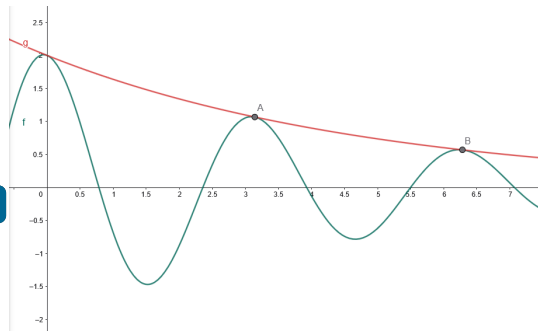
$$\lambda_{1,2} = -\delta \quad d = d_{krit.} = 2 \cdot \sqrt{m \cdot c}$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ des Systems:

$$\lambda_{1,2} = -\underbrace{D\omega}_{\delta} \pm i \underbrace{\omega \sqrt{1 - D^2}}_{\omega_d}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}$$

Das Logarithmische Dekrement



$$g(t) = A \cdot e^{-\delta t}$$

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega_d t)$$

Messpunkte:

$$A = x(t) \quad B = x(t + T) \quad \Lambda = \ln\left(\frac{A}{B}\right) \quad \Lambda = \delta T_d$$

$$D \text{ sehr klein} \Rightarrow \Lambda \approx 2\pi D \Rightarrow D \approx \frac{\Lambda}{2\pi}$$

Amplitude nach N Schwingungen

Für den unterkritisch gedämpften Schwinger fällt die Hüllkurve gemäss:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$$

Nach N Perioden T_d :

$$A_N = A_0 e^{-\delta t} \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad t = NT_d$$

Federgesetze

Parallelschaltung:

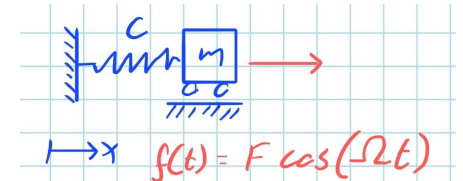
$$c = c_1 + c_2 \quad c = \sum_{i=1}^n c_i$$

Serienschaltung:

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{\prod_{i=1}^n c_i}{\sum_{i=1}^n c_i} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Variante 3: erzwungene Schwingungen, ungedämpfte Systeme

3.1: Erregung durch Kraft



$$m\ddot{x} = -cx - f(t) \Rightarrow m\ddot{x} + cx = F \cos(\Omega t)$$

Lösungsverfahren:

Homogene Lösung der DGL

Partikuläre Lösung der DGL

Ansatz:

$$x(t) = X \cos(\Omega t)$$

$$\left(-\frac{m}{c} \Omega^2 + 1 \right) X = \frac{F}{c} \Rightarrow \left(-\left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 + 1 \right) X = X_0$$

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

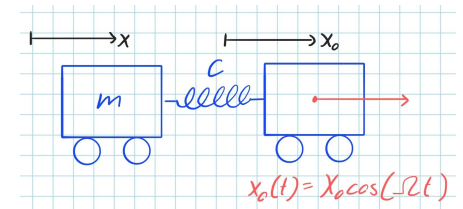
$$\tan(\phi) = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

$$\left| \frac{X}{X_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$X_0 = \frac{F}{c}$$

E : Erregungsfaktor

$$E = \eta^2$$

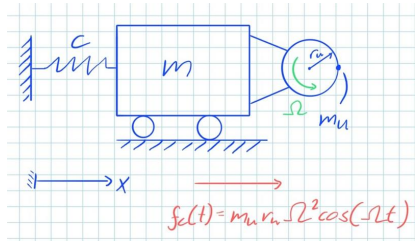


Erregung durch zweiten Wagen:

$$x_0(t) = X_0 \cos(\Omega t)$$

$$V = \frac{\text{Ampl. Antwort}}{\text{Ampl. Erregung}} \quad V = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

3.2: Erregung durch Unwucht



$$f_c(t) = m_u r_u \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

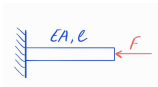
$$m\ddot{x} + cx = m_u r_u \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$V = \frac{\text{Ampl. Antwort}}{\text{Ampl. Erregung}} \quad V = \frac{X}{X_0} = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$$

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$X_0 = \frac{m_u r_u}{m}$$

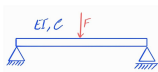
Wichtige Lastfälle und Ersatzsteifigkeiten



$$c = \frac{EA}{l}$$



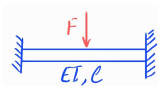
$$c = \frac{3EI}{l^3}$$



$$c = \frac{48EI}{l^3}$$



$$c = \frac{M_0}{\varphi} = \frac{EI}{l}$$

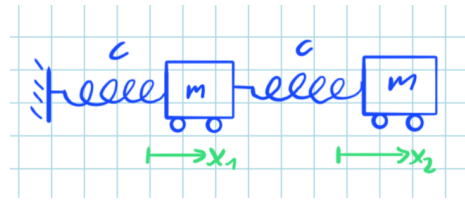


$$c = \frac{192EI}{l^3}$$



$$c = \frac{96EI}{l^3}$$

Variante 1: n-Freiheitsgrade



Bewegungsgleichungen:
(für jeden Freiheitsgrad eine)

$$m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0$$

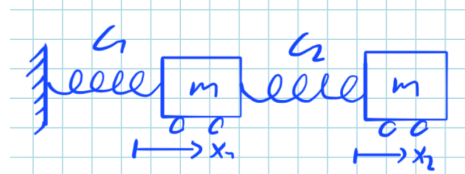
Matrix-Vektor Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\text{Massenmatrix } M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix } K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

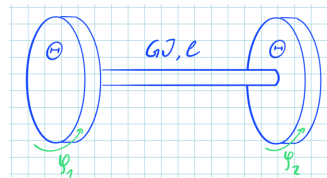
$$\text{Eigenwertproblem} \Rightarrow \begin{cases} \det(K - \omega^2 M) = 0 \\ \det(K - \lambda M) = 0 \end{cases}$$

Spezialfälle



$$\text{wenn } c_1 \gg c_2 \Rightarrow \omega^2 \approx \frac{c_2}{m}$$

$$\text{wenn } c_1 \ll c_2 \Rightarrow \omega^2 \approx \frac{c_1}{2m}$$



Massenträgheitsmoment Θ Torsionssteifigkeit GJ

$$\text{Länge } l \quad \text{Ersatzsteifigkeit } c = \frac{GJ}{l}$$

$$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \text{System dreht frei} \quad \omega_2^2 = \frac{GJ}{2l\Theta}$$



$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

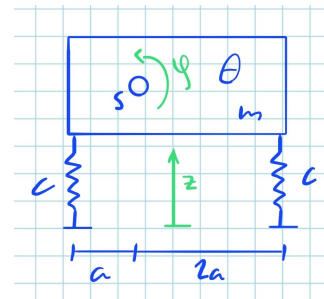
$$\text{MATLAB: } R, \lambda = \text{eig}(K, M)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad \lambda_1 = \omega_1^2 \dots$$

(1) : Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 \dots$

Interpretation der Eigenvektoren



$$R = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.29 \\ -0.29 & 0.96 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \omega_1^2 = 1.7 \text{ rad/s}^2$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 5.3 \text{ rad/s}^2$$

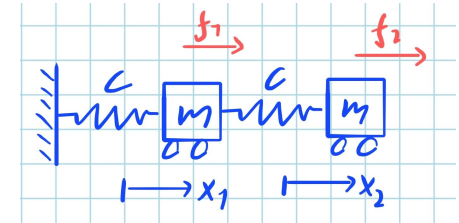
Fall 1:

$$\text{wenn } z > 0 \Rightarrow \varphi < 0$$

Fall 2:

$$\text{wenn } z > 0 \Rightarrow \varphi > 0$$

Variante 3: erzwungene Schwingungen, ungedämpfte Systeme mit zwei Freiheitsgraden



$$M\ddot{x} + Kx = f$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \cos(\Omega t)$$

Ansatz:

$$x(t) = A \cos(\Omega t)$$

allgemeine Lösung:

$$A = \underbrace{(-M\Omega^2 + K)^{-1}}_P F$$

Zusammenhang zwischen A und F:

$$A = \frac{1}{\det(P)} \cdot PF$$

$$\underbrace{A}_{\text{Output}} = \underbrace{H(\Omega)}_{\text{Übertragungsfunktion}} \cdot \underbrace{F}_{\text{Input}}$$

$$\text{Resonanz: } \underbrace{A \rightarrow \infty}_{\Omega = \omega_1 \quad \Omega = \omega_2} \quad \det(-M\Omega^2 + K) \stackrel{!}{=} 0$$

Übertragungsfunktionsmatrix H

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \rightarrow A_1 & F_2 \rightarrow A_1 \\ F_1 \rightarrow A_2 & F_2 \rightarrow A_2 \end{matrix}$$

Tilgung

$$A_1 = 0 \quad A_2 = H \cdot F_1$$

Tilgung bei:

$$\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

