

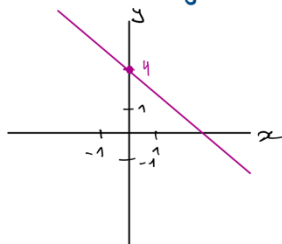
Gerade: form $\rightarrow y = mx + c$

$g(x) = x + 2$ oder $g(x) = -x - 2$
 $g(x) = 2x + 2$ oder $g(x) = -2x + 4$

1. Nullstelle
 $g(x) \rightarrow 0$ setzen

$g(x) = x + 2$
 $\Rightarrow x + 2 = 0$
 $x = -2$

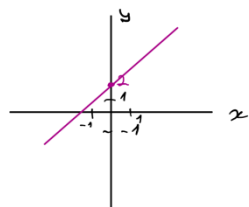
Skizzieren: $g(x) = -2x + 4$



m : Steigung
 c : y-Achsenabschnitt

$\rightarrow$ Steigung -2
 negativ: ✗

$\rightarrow$ Schnittpunkt:
 $y = 4$



$g(x) = x + 2$

$\rightarrow$ Steigung: 1
 positiv: ✗

$\rightarrow$ Schnittpunkt:
 $y = 2$

Parabel: form $\Rightarrow x^2$

$f(x) = x^2 + x + 2$ oder $f(x) = x^2 + 1$
 $f(x) = -x^2 + x - 2$ oder $f(x) = -x^2 + 4$

Nullstellen:

$f(x) \Rightarrow 0$

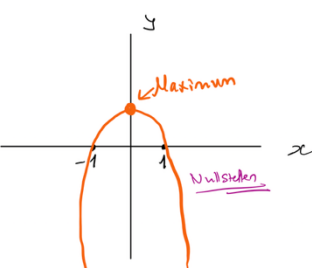
$\rightarrow f(x) = x^2 + x + 2$

$\rightarrow$ Mitternachtsformel

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$x_1 =$

$x_2 =$



Skizze:

1. Leitkoeffizient $\rightarrow$ Globalverhalten

2. $f'(x) = 0$ | extremwert Kandidaten

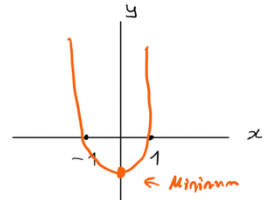
3. $f''(\text{Kandidaten}) = 0$

$f''(\text{Kandidaten}) = \text{negativ}$

$\rightarrow$ Maximum

$f''(\text{Kandidaten}) = \text{positiv}$

$\rightarrow$ Minimum



2. Globalverhalten bestimmen (Start und Ende)!

Wo fängt der Graph an und wo hört er auf?

$\rightarrow$ Betrachte höchsten Exponent

$\rightarrow -x^3$

Logik:

- Gerader Grad (z.B. $x^4, -x^2$): Graph beginnt und endet auf der gleichen Seite (beide oben oder beide unten).
- Ungerader Grad (z.B. $x^3, -x^5$): Graph beginnt und endet auf gegenüberliegenden Seiten (links unten $\rightarrow$ rechts oben oder links oben $\rightarrow$ rechts unten).
- Negativer Leitkoeffizient (wie Ihr $-x^3$): Der Graph muss rechts unten enden ($x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$).

$-x$: ungerade und negativ

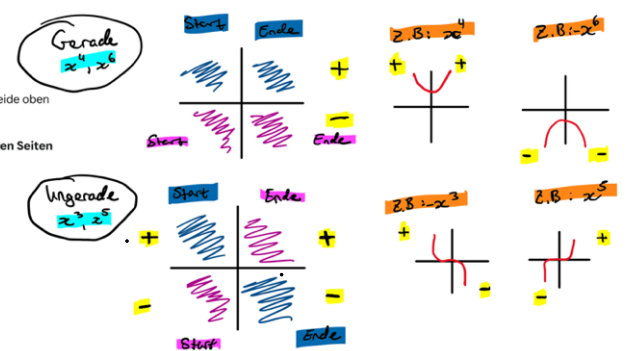
3. y-Koordinaten:

Setze $\Rightarrow x = 0$

$(0+1)^2 \cdot (1-0)$

$f(0) = 1$

$\rightarrow (0, 1)$ Höhepunkt



Nullstellen herauslesen:

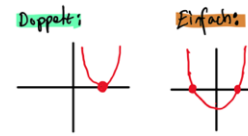
$(x-3)^2 \cdot (x+2)$

$\hookrightarrow x = 3$

$\hookrightarrow x = -2$

Doppelt

Einfach



- Eine **Doppelt** Nullstelle berührt die x-Achse
- Eine **Einfach** Nullstelle durchquert die x-Achse

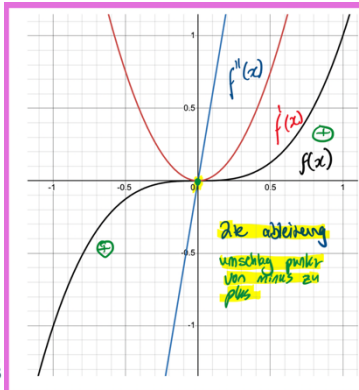
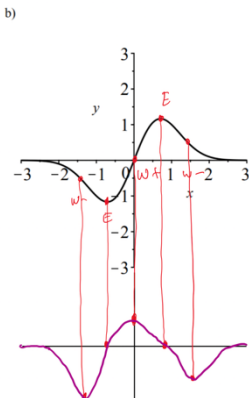
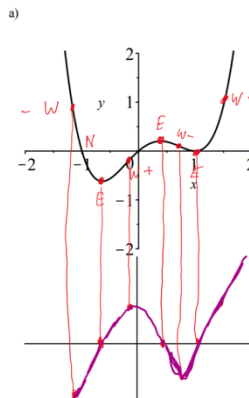
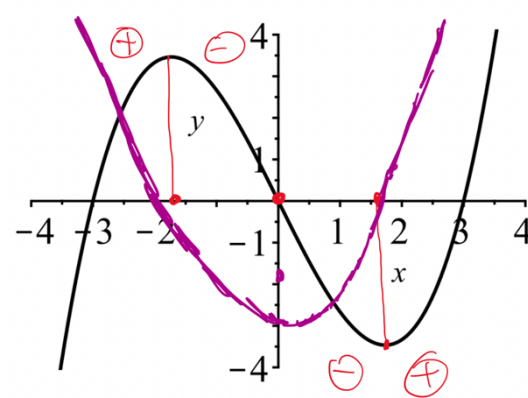
Extremstellen $\rightarrow$ Nullstellen

(Hochpunkte, Tiefpunkte, Sattelpunkte)

Wendestelle $\rightarrow$ Extremstellen

Brücke!
NEW
NEW

a) (2P)



Kapitel 1:

Aufgabe 1 (ohne Rechner, 6 Punkte)

Dargestellt ist der Graph eines Polynoms $p(x)$ vom Grad 4. Die drei Kreise markieren Punkte auf dem Graphen mit ganzen Zahlen als Koordinaten.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms $p(x)$. 2P

b) Berechnen Sie die Koordinaten des nicht trivialen Wendepunktes. 2P

c) Geben Sie die Koordinatengleichung der Tangente durch den Punkt $P(0,8)$ an. 2P

a) Formel: $p(x) = a \cdot (x-x_1)^{n_1} \cdot (x-x_2)^{n_2} \dots$

Nullstellen:
 $x = -2 \rightarrow 3 \text{ fach}$
 $x = 1 \rightarrow \text{einfach}$

$p(x) = a \cdot (x+2)^3(x-1)$

Die Regel:
 Um ein (den) Streichfaktor zu bestimmen, braucht du immer einen Punkt, den du noch nicht benutzt hast.
 • Die Punkte auf der x-Achse (Nullstellen) hast du für die Klammern verbraucht.
 • Der Punkt auf der y-Achse (0|8) ist noch "frisch". Nur er verrät dir, wie hoch oder tief der Graph gegangen wird.

$a = (0,8)$
 Punkt in $p(x)$ einsetzen und auflösen:
 $8 = a \cdot (0+2)^3(0-1)$
 $8 = 8a(0-1)$
 $8 = -8a \quad | : -8$
 $a = \underline{\underline{-1}} \quad (1P)$

$p(x) = -1(x+2)^3(x-1)$
 $-1(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$
 $\rightarrow -1(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$
 $\rightarrow p(x) = -x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x + 8 \quad (1)$

b) $p(x) = -x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
 $p'(x) = -4x^3 - 15x^2 - 12x + 4$
 $p''(x) = -12x^2 - 30x - 12$
 $\rightarrow -12x^2 - 30x - 12 = 0$
 $- (30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot (-12) \cdot (-12)}$
 $2 \cdot -12$
 $x_1 = -2$
 $x_2 = -\frac{1}{2}$

Trivial: Nicht trivial offen sichtbar: weil $x = -2$ muss $x = -\frac{1}{2}$ sein. (1P)

$\rightarrow p(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^4 - 5(-\frac{1}{2})^3 - 6(-\frac{1}{2})^2 + 4(-\frac{1}{2}) + 8$
 $p(-\frac{1}{2}) = \frac{81}{16}$
 $(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16}) \quad (1P)$

c) Koordinatengleichung / Tangentengleichung:

① $y = mx + c \quad | P(0,8)$
 $\rightarrow 8 = c$

② Steigung m:
 $p'(0) = 4$

③ c berechnen
 $y = mx + c$
 $8 = 4 \cdot 0 + c$
 $c = 8 - (4 \cdot 0)$
 $c = 8$
 $\rightarrow y = 4x + 8 \quad (1)$

Sattelpunkt: form $\rightarrow \underline{\underline{x^3}}$ oder $-x^3$

$f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ oder $f(x) = x^3 + x^2 + x$
 $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$ oder $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$

Nullstellen:

1. Faktorisieren / Ausklammern
 $\rightarrow f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$
 $\rightarrow f(x) = x(-x^2 + x - 1) + 3$

2. Polynom division
 3. Horner Schema

$\rightarrow$ Polynom Division

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
 $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 1) = \underline{\underline{x^2 - 3x - 2}}$, Rest $\underline{\underline{4}}$

$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -3x^2 + x + 6 \\ -(-3x^2 + 3x) \\ \hline -2x + 6 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 4 \end{array}$

Rest $\underline{\underline{4}}$

Rest ja? | Rest nein?
 $\downarrow$ | $\downarrow$
 Divisor + Rest | passt so wie es ist

Resultat $= x^2 - 3x - 2 + \frac{4}{x-1}$

Nullstellen berechnung nicht möglich mit Rest

Nicht Triviale Wendepunkt:

1. x Wert des Wendepunkts nehmen und in erste Ableitung einsetzen.

2. Ergebnis $\neq 0 \rightarrow$ Nicht trivialer Wendepunkt. $\rightarrow$

Ergebnis $= 0 \rightarrow$ Sattelpunkt / Triviale Wendepunkt. $\rightarrow$

Skizzieren:

$\rightarrow$ Nullstellen einzeichnen
 $\rightarrow$ Extrema, Wendepunkt / Sattelpunkt.

$\underline{\underline{x^3}}$:

Extrema / Sattelpunkt(e):
 $f''(x) = -6x - 2$
 $f''(x) = 0$
 $\therefore -6x - 2 = 0$
 $\therefore x = -0.33$
 $f'''(x) = -6 \rightarrow$ wenn $f'''(x) \neq 0$ dann Wendepunkt

Übersicht der Ableitungen

Ableitung	Formel	Anwendung
$f(x)$	$x^3 - x^2 + x + 1$	Funktionswert
$f'(x)$	$-3x^2 - 2x + 1$	Steigung, Extrema-Kandidaten ($f'(x) = 0$)
$f''(x)$	$-6x - 2$	Krümmung, Art der Extrema, Wendepunkt-Kandidaten ($f''(x) = 0$)
$f'''(x)$	-6	Wendepunkt prüfen ($f'''(x) \neq 0$)

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$
 $x_1 = \frac{1}{3} \rightarrow$ Knoten
 $x_2 = -1$

$f''(x) = -6x - 2$
 $f''(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$
 $f''(-1) = \frac{4}{3}$

$\rightarrow$ Beide $\neq 0$, somit Wendepunkte

$f(\frac{1}{3}) = 1,185 \rightarrow (3, \frac{22}{3})$
 $f(-1) = 0 \rightarrow (-1, 0)$

Kombinationen:
 $\rightarrow (0, 1)$
 $\rightarrow (-1, 0)$
 $\rightarrow (1, 0)$

Nullstellen:
 $x_1 = 0$
 $x_2 = -1$
 $x_3 = 1$

Globalverhalten:
 Leitkoeffizient: negativ
 Potenz: ungerade

Fläche berechnen:

!Aufpassen: immer obere funktion - untere funktion

$$f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = -x + 1$$

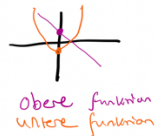
1. Schnittpunkte (Integralgrenzen):

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \therefore x^2 + x - 2 \\ \therefore \text{Nullstellen:} \\ &\rightarrow x_1 = -2 \rightarrow [-2, 1] \\ &\quad x_2 = 1 \\ \therefore \text{V-Koordinaten} \\ &\rightarrow (-2, 3) \\ &\rightarrow (1, 0) \end{aligned}$$

2. Differenzfunktion:

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ d(x) &= (4 - x^2) - (-x + 2) \\ d(x) &= 4 - x^2 - x - 2 \\ d(x) &= -x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

!Aufpassen
Vorzeichen
falsch



3. Integral & integrieren

$$\int_{-2}^1 -x^2 - x + 2$$

! Integrationsregeln
S. 152

$$\therefore \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right)_{-2}^1$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) \right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 2(-2) \right)$$

! Oben minus
unten

$$A = \frac{9}{2}$$

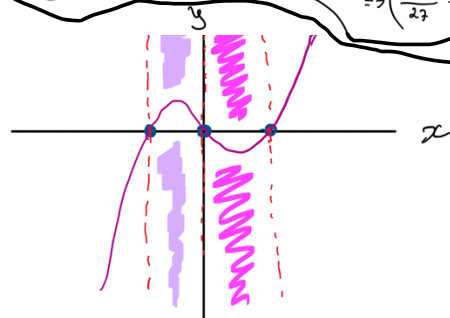
Kleineres Beispiel: Linearität!

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x \right) dx &= \frac{4}{9} \int_0^6 x^2 dx + \frac{8}{3} \int_0^6 x dx \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 + \frac{8}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 \\ &= \left(\frac{4x^3}{27} + \frac{8x^2}{6} \right) \Big|_0^6 \end{aligned}$$

Nullstellen im Intervall:

$$f(x) = x^3 - x$$

Aufgabe: Fläche zwischen -1 und 1 berechnen



1. Flächen aufteilen

$$1. \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx$$

$$2. \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$\therefore \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$\rightarrow 0.25 + 0.25 \rightarrow \underline{\underline{0.5}}$$

Tangentengleichung: Form $\rightarrow t(x) = m \cdot x + c$ oder Geradengleichung

In Frage gegeben: $P(0, 8) \rightarrow x = 0, y = 8$

1. k-Wert: 8

↳ Wenn nicht vorhanden kann x wert in $f(x)$ einsetzen $\rightarrow y$ ist result

2. Steigung "m" finden:

↳ Erste ableitung ziehen
↳ x wert einsetzen = Steigung

3. c berechnen:

Aber in geraden gleichung einsetzen:

$$y = m \cdot x + c$$

$$\therefore c = y - (m \cdot x)$$

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \text{ an der Stelle } x = 2$$

$$1. f(2) = 2^2 \rightarrow \underline{4} \text{ y wert}$$

$$2. f'(x) = 2x$$

$$f'(2) = 2(2) \rightarrow \underline{4} \text{ Steigung}$$

$$3. y = m \cdot x + c$$

$$y = 4, m = 4, x = 2$$

$$c = y - (m \cdot x)$$

$$\therefore c = 4 - (4 \cdot 2)$$

$$c = -4$$

$$\rightarrow y = 4x - 4$$

Aufgabe 2 (ohne Rechner, 6 Punkte)

a) Gegeben ist das Polynom $p(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - b)$. Das Ziel ist es, die Parameter a und b so zu wählen, dass $p(-1) = 4$ ist und die Tangente bei $x = 2$ horizontal ist.

- Stellen Sie ein Gleichungssystem für a und b auf.
- Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
- Erstellen Sie eine qualitative Skizze des Graphen von $p(x)$.

Hinweis: Wenn Sie (i) und (ii) nicht lösen können, dürfen Sie bei (iii) die (falschen) Werte $a = -5$ und $b = 7$ verwenden.

b) Wir setzen $a = 1$. Wie muss b gewählt werden, damit $p(x)$ bei $x = 3$ einen Wendepunkt besitzt.

a) 1. Schritt:

$$p(x) \text{ ausmultiplizieren: } p(x) = ax^3 - abx^2$$

2. Schritt:

$$\text{Punkt: } p(-1) = 4 \rightarrow p(x)$$

Tangente bei $x = 2 \rightarrow$ Steigung 0 bei $x = 2 \mid p'(x)$

$$3. p(-1) = a(-1)^3 - ab(-1)^2$$

$$p(-1) = -a - ab$$

$$\rightarrow -a - ab = 4$$

$$\text{Tangente } \rightarrow ax^3 - abx^2$$

$$p(x) = ax^3 - abx^2$$

$$p'(x) = 3ax^2 - 2abx$$

$$\rightarrow p'(2) = 3a(2)^2 - 2ab(2)$$

$$\text{I } \begin{cases} -a - ab = 4 \\ 12a - 4ab = 0 \end{cases}$$

$$\text{II } 4a(3 - b) = 0$$

$$\text{Ziele: } 4a = 0$$

$$a = 0$$

$$\rightarrow -(-0) - (-0) \cdot b = 4$$

Gehirn nicht

$$3 - b = 0$$

$$b = 3$$

$$\begin{aligned} \text{I } -a - a(3) &= 4 \\ -a - 3a &= 4 \\ -4a &= 4 \quad | : -4 \\ a &= -1 \\ \text{II } 12(-1) - 4(-1) \cdot (3) &= 0 \\ -12 + 12 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$a = -1 \quad b = 3$$

$$b) p(x) = ax^3 - abx^2$$

$$a = 1$$

$$b = ?$$

$$x = 3 \quad \text{Wendepunkt Steigung } = 0$$

$$p''(x) \text{ für Kandidaten}$$

$$p(x) = x^3 - bx^2$$

$$\rightarrow p'(x) = 3x^2 - 2bx$$

$$p''(x) = 6x - 2b$$

$$p''(3) = 6(3) - 2b$$

$$\rightarrow 18 - 2b = 0$$

$$\rightarrow 2b = 18 \quad | : 2$$

$$\rightarrow b = 9$$

Kapitel 2: Summen

Arithmetische Folgen

Direktes Bildungsgesetz:

$$a_i = a_1 + (i-1) \cdot d$$

Finde die Lösung einer exakten Position von n

Glied
anzahl der
Glieder finden

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\therefore 40 = 250 + (n-1) \cdot -6$$

$$\therefore -210 = (n-1) \cdot (-6)$$

$$\therefore 35 = n-1$$

$$\therefore n = \underline{36}$$

Reihe hat 36 Glieder

Glied
letztes
Glieder finden

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

↓
Formel in folgende
Formel einsetzen:

$$a_n = (n+1) \cdot \frac{a_0 + a_n}{2} \quad \downarrow \text{ Division durchföhren}$$

$$\therefore a_n = (n+1) \cdot (a_0 + a_n)$$

• Ausmultiplizieren

• → Quadratische Formel

$$\text{z.B. } 6n^2 + 9n + 6 = 1400$$

$$6n^2 + 9n - 1794 = 0$$

• Mitternachtsformel

$$\rightarrow n = \underline{23}$$

• Ergebnis: $23 + 1 = \underline{24}$

+1 weil wenn a_0 Startpunkt

Kartenhaus Beispiel

$$\text{Etage} = n$$

$$\text{Anzahl Karten} = a_n$$

S_n = alle Karten in einer Etage, ist die Partial Summe.

Beispiel: was ist S_n bei 50 Etagen?

$$S_n = \frac{50}{2} (2 \cdot 2 + (50-1) \cdot 3)$$

$$S_n = 3775$$

Beispiel: wie viele Etagen bei 104 Spielkarten?

$$104 = \frac{n}{2} (2 \cdot 2 + (n-1) \cdot d)$$

$$104 = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3)$$

$$104 = \frac{n}{2} \cdot (4 + 3n - 3)$$

$$208 = 4n + 3n^2 - 3n$$

$$3n^2 - n = 208 \quad | -208$$

$$3n^2 - n - 208 = 0$$

$$x_1 = 8,41 \rightarrow \checkmark$$

$$x_2 = -8,16$$

8 Stockwerke und 0,41

verbleiben als übrig.

Summenformel

Bekannt: a_1, d, S_n

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Nach n auflösen →
es muss eine quadratische Gleichung entstehen!

a_1 und d aus 2 (partial) Summen finden:



2 verschiedene Partial Summen
z.B. ($S_7 = 119$ und $S_{28} = 1946$)



3. Schritte zur Lösung:

GLS aufstellen ==>

$$\text{Summenformel: } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

→ Für beide Partial Summen anwenden.

$$\text{I } 119 = \frac{7}{2} (2 \cdot a_1 + (7-1) \cdot d)$$

$$\therefore 119 = \frac{7}{2} (2a_1 + (6) \cdot d)$$

$$\therefore 119 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6d) \quad | \div \frac{7}{2}$$

$$\therefore 34 = 2a_1 + 6d$$

$$\text{II } 1946 = \frac{28}{2} (2a_1 + (28-1) \cdot d)$$

$$\therefore 1946 = \frac{28}{2} (2a_1 + 27d) \quad | \div \frac{28}{2}$$

$$\therefore 139 = 2a_1 + 27d$$

2. GLS lösen:

$$\text{II} - \text{I} = 139 - 34 = (2a_1 + 27d) - (2a_1 + 6d)$$

$$105 = 21d \quad | \div 21$$

$$d = \underline{\underline{5}}$$

3. Zweite Unbekannte berechnen:

$$34 = 2a_1 + 6(5)$$

$$\therefore 34 = 2a_1 + 30 \quad | -30$$

$$2a_1 = 4 \quad | \div 2$$

$$a_1 = \underline{\underline{2}}$$

Sonderfall:

(a) Bei einer Folge $a_k = a_1 + (k-1)d$ mit $k \geq 1$ beträgt die Summe der ersten 40 Glieder 2180 und die Summe vom zweiten bis zum 41. Glied 2300. Stellen Sie zwei Gleichungen auf, welche nur die Parameter a_1 und d enthalten und bestimmen Sie die Werte beider Parameter.

Summe ersten 40 Glieder!
und

Summe vom zweiten bis zum 41. Glied

→ Wir wissen a_1 nicht, es folgt:

Startwert nicht a_1 sondern

$$a_2 \rightarrow a_2 = a_1 + d$$

Dies wird für a_1 in der Summenformel eingesetzt.

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$S_{40} = \frac{40}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$2180 = \frac{40}{2} (2a_1 + (40-1) \cdot d) \quad | \div \frac{40}{2}$$

$$109 = 2a_1 + 39d \rightarrow \text{I } \checkmark$$

$$\therefore S_{40} = \frac{40}{2} (2(a_1 + d) + (40-1) \cdot d) \quad | \div \frac{40}{2}$$

$$115 = 2a_1 + 2d + 39d$$

$$115 = 2a_1 + 41d \rightarrow \text{II } \checkmark$$

→ II - I =

$$115 - 109 = (2a_1 + 41d) - (2a_1 + 39d)$$

$$6 = 2d \quad | \div 2$$

$$d = \underline{\underline{3}} \quad \checkmark$$

• a_1 finden:

$$109 = 2a_1 + 39(3)$$

$$109 = 2a_1 + 117 \quad | -117$$

$$2a_1 = -8 \quad | \div 2$$

$$a_1 = \underline{\underline{-4}} \quad \checkmark$$

(6P)

Summen:

Glieder

Anzahl Glieder
finden:

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(q)} + 1$$

Differenz:

$$\therefore q = \frac{a_1}{a_0}$$

$$q = \frac{3}{1}$$

$$q = 3$$

→ Direktes Bildungsgesetz:

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore 2187 = 1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore n = 7$$

Summenformel

Bekannt: a_1, d, S_n

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Nach n auflösen →
es muss eine quadratische
Gleichung entstehen!

Summe

Summe wenn Glieder (n)

bekannt:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

$$\therefore S_8 = 1 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3}$$

$$S_8 = \underline{\underline{3280}}$$

Summe

Anzahl Glieder ergeben Summe

Formel nutzen:

$$a_0 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \text{end summe}$$

$$\therefore 6 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 6138$$

→ Bruch auflösen

$$6 \cdot \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{-1} \right) = 6138$$

$$\therefore \frac{6(1 - 2^{n+1})}{-1} = 6138$$

$$\therefore \frac{6 - 12^{n+1}}{-1} = 6138 \quad | \cdot (-1)$$

$$\therefore 6 - 12^{n+1} = -6138$$

→ Durch 6 teilen

$$\therefore 1 - 2^{n+1} = -1023 \quad | -1$$

$$\therefore -2^{n+1} = -1024$$

→ Minus loswerden

$$\therefore -2^{n+1} = -1024 \quad (| \cdot (-1))$$

$$\therefore 2^{n+1} = 1024$$

$$\therefore \text{TR} \rightarrow \log_2(1024)$$

$$\therefore \underline{\underline{10}}$$

$$\rightarrow n+1 = 10$$

$$\rightarrow n = \underline{\underline{9}}$$

Summe

Anfangsglied finden:

Wenn bekannt ist:

1. Endsumme (S_n)
2. Anzahl Glieder (n)
3. Quotient (q)

Man nimmt die Allgem. Summenformel
und stellt diese nach a_1 um

Ausgangsgleichung:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

umgestellte Formel:

$$a_1 = S_n \cdot \frac{1 - 2}{1 - 2^n}$$

Bekannte Werte:

$$1. S_n = 600 \text{ CHF}$$

$$2. n = 17$$

$$3. q = 1.1 \text{ (wegen 10\% Zunahme)}$$

$$a_1 = 600 \cdot \frac{1 - 1.1}{1 - 1.1^{17}}$$

→ Vereinfachen

$$a_1 = 600 \cdot \frac{-0.1}{-4.05447}$$

→ Resultat:

$$a_1 = \underline{\underline{14,79}}$$

$$b) x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}$$

$$2.1.3 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{a_x} - \sqrt{b_x} \text{ erweitern mit } \sqrt{a_x} + \sqrt{b_x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{x^2 + x - x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{3}{2}$$

Trick 2.1.3

Summe

Letztes Glied finden:

Wenn bekannt ist:

1. Anfangsglied (a_1)
2. Anzahl der Glieder (n)
3. Quotient (q)

Formel: Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

→ Bekannte Werte:

$$1. a_1 = 14.80 \text{ CHF}$$

$$2. n = 17 \text{ Personen}$$

$$3. q = 1.1$$

→ Einssetzen:

$$a_n = 14.8 \cdot 1.1^{17-1}$$

→ Resultat:

$$\underline{\underline{67.99 \text{ CHF}}}$$

Anfangsglied und Quotient finden
aus Partialsummen:

$$\left(a_3 = \frac{8}{25}, a_6 = \frac{512}{3125} \right)$$

1. Quotienten finden:

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\rightarrow a_3 = a_1 \cdot 2^{3-1}$$

$$\frac{8}{25} = a_1 \cdot 2^2 \rightarrow I$$

$$\rightarrow a_6 = a_1 \cdot 2^{6-1}$$

$$\frac{512}{3125} = a_1 \cdot 2^5 \rightarrow II$$

2. Eliminierung von a_1

$$\frac{II}{I} \Rightarrow \frac{512}{3125} = \frac{a_1 \cdot 2^5}{a_1 \cdot 2^2} = \frac{a_1 \cdot 2^3}{a_1 \cdot 2^2}$$

$$\therefore \frac{64}{125} = 1 \cdot 2^3 \rightarrow \frac{64}{125} = 2^3 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$\rightarrow 2 = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

Anfangsglied und Quotient finden:

Wenn bekannt ist:

1. Endsumme (S_n)
2. Anzahl Glieder (n)
3. Ein Verhältnis zwischen erstem (a_1) und
letztem Glied (a_n), z.B. $a_n = 3 \cdot a_1$

Lösung in 2 Schritten:

1. Quotienten finden:

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

→ Setze Verhältnis ein um a_1 zu
eliminieren und nach q auflösen
z.B.

$$\therefore a_7 = 3 \cdot a_1$$

$$a_1 \cdot 3 = a_1 \cdot 2^{7-1}$$

$$\therefore 2^6 = 3 \Rightarrow q = \sqrt[6]{3}$$

2. Anfangsglied (a_1) finden:

#1

umgestellte Formel:

$$a_1 = S_n \cdot \frac{1 - 2}{1 - 2^n}$$

Wenn bekannt:
 $S_n \Rightarrow$ Endsumme
 $n \Rightarrow$ Anzahl Glieder

Bekannte Werte:

$$1. S_n = 600 \text{ CHF}$$

$$2. n = 17$$

$$3. q = 1.1 \text{ (wegen 10\% Zunahme)}$$

$$a_1 = 600 \cdot \frac{1 - 1.1}{1 - 1.1^{17}}$$

→ Vereinfachen

$$a_1 = 600 \cdot \frac{-0.1}{-4.05447}$$

→ Resultat:

$$a_1 = \underline{\underline{14,79}}$$

3. a_1 finden:

$$\text{Formel: } a_1 = \frac{a_n}{2^{n-1}}$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{a_2}{2^{3-1}}$$

$$\therefore a_1 = \frac{8}{25}$$

$$\therefore a_1 = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

Grenzwerte:

$$a) x_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+3} - 2^n}$$

2.1.2 erweitern mit $\frac{1}{a^k} = \frac{1}{7^n}$ mit a grösste Basis und k kleinste Exponent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^{n-1} + 3^n}{9 \cdot 3^{n+1} - 3} = \frac{3 \cdot 3^{-1} + 1}{9 \cdot 3^1 - \frac{3}{3^0}} = \frac{2}{27}$$

$$x_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+3} - 2^n} \Rightarrow \text{Trick 2.1.2} \quad \frac{1}{a^k} = \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+3} - 2^n} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\therefore \frac{2}{3^n} \cdot \frac{3^n}{3^n} = \frac{2}{3^n}$$

Vereinfachen:

$$\frac{2}{3^n} \cdot 1 = \frac{2}{3^n}$$

$$3^{(n+3)-n} = 3^3 = 27$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{27} = \frac{1}{13.5} \checkmark$$

A 4)

a)

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{5^{n-1} + 2^n}{5^{n+1} - 5}}$$

$$\frac{5^{n-1} + 2^n}{5^{n+1} - 5} \quad \left| \cdot \frac{1}{5^n} \right.$$

$$(n+1) - (n-1) = 2$$

$$\frac{5^{n-1} + 2^n}{5^{n+1} - 5} \cdot \frac{1}{5^n} \rightarrow \frac{\frac{5^{n-1}}{5^n} + \frac{2^n}{5^n}}{\frac{5^{n+1}}{5^n} - \frac{5}{5^n}} \rightarrow \frac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{5^2 - \frac{5}{5^{n-1}}}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{5^2 - \frac{5}{5^{n-1}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{2^{100}}{5^{100-1}}}{5^2 - \frac{5}{5^{100-1}}}} = \frac{1}{5}$$

Wenn $n \rightarrow \infty$:

$n = 100 \rightarrow$ Schauen wir die Konvergenz

$\therefore n = 100 \rightarrow 0.199$
 $n = 1000 \rightarrow 0.1999$

$$2.1.4 \text{ umformen zu } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{\frac{2}{3}x} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{\frac{2}{3}x}\right)\right)} = e^{\frac{8}{9}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{2}{3}x \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{3}{4}x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)} \rightarrow e^{\frac{8}{9}}$$

$$c) x_n = \left(1 + \frac{4}{3 \cdot n}\right)^{\frac{2}{3} \cdot n}$$

1. Schema erkennen
2. Trick anwenden weil ist bruch
3. Gleichung aufsetzen $\rightarrow x$ lösen
4. Gleichung für x einsetzen
5. Eulerform schreiben $\rightarrow e$ herauslegen $\rightarrow$ lösung

Eulerzahl e Mondan, Schranke bei e

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \leftarrow \text{Trick } n + \frac{1}{8n} = n + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n}$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n \Rightarrow \text{muss gleich sein}$$

$$\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{n \cdot \left(\frac{5}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}} \Rightarrow \text{es bleibt } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{5}$$

$\times \text{ mit } \frac{1}{5} \text{ in Form } \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$ $\hookrightarrow e^{-\frac{1}{5}}$

$$\frac{3}{4}n \cdot x = \frac{3}{4}n \quad \left| \cdot \frac{4}{3} \right.$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}n \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}n$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{3}{4}n \cdot \frac{8}{9}}$$

$$\text{Eulerform: } \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{3}{4}n} = e^1$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{3}{4}n}\right]^{\frac{8}{9}} = e^{\frac{8}{9}}$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{6n}\right)^{-3n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{6n}{5}}\right) \rightarrow$$

$$\frac{6}{5}n \cdot x = -3n \quad \left| : \frac{6}{5}n \right.$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{6n}{5}}\right)^{\frac{6}{5}n \cdot -\frac{5}{2}}$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{6n}{5}}\right)^{\frac{6n}{5}}\right]^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}}$$

Summenzeichen Karten:

$$\frac{\sum_{k=1}^9 a_k - \sum_{k=2}^8 a_k}{\sum_{k=1}^3 a_k}$$

Zähler

Nenner

Zähler: $\sum_{k=1}^9 a_k - \sum_{k=2}^8 a_k$

erste Summe: $k=1$ bis $k=9$

zweite Summe: $k=2$ bis $k=8$

Differenz = $(a_1 + \dots + a_9) - (a_2 + \dots + a_8)$

Differenz = $a_1 + a_9 \rightarrow$ Zähler

Nenner $\rightarrow a_1 + a_2 + a_3$

Vereinfachter Ausdruck:

$$\frac{a_1 + a_9}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Doppel Summe:

$$S = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{i^2}{j} - \frac{j}{i} \right) \right)$$

Für $j=1$: $i=1$ und $i=2$:

Runde 1: $j \rightarrow \left(\frac{1^2}{1} - \frac{1}{1} \right) = 0$

Für $j=2$: $i=1$ und $i=2$:

Runde 2: $j \rightarrow \left(\frac{1^2}{2} - \frac{2}{1} \right) = -\frac{3}{2} = -1.5$

Für $j=1$: $i=2$ und $i=1$:

Runde 3: $i \rightarrow \left(\frac{2^2}{1} - \frac{1}{2} \right) = 3.5$

Für $j=2$: $i=2$ und $i=1$:

Runde 4: $i \rightarrow \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2}{2} \right) = 1$

$\rightarrow -1.5 + 3.5 + 1 = 3$

b) Wir betrachten die arithmetische Folge mit $a_1 = 10$ und $d = 8$. Bestimmen Sie

den Summenwert von $\sum_{k=50}^{150} a_k$.

k : Laufindex
 50 : untere Summationsgrenze
 150 : obere Summationsgrenze

1. Schnitt Startwert finden:

! Summe fängt bei a_{50} an, nicht a_1

$$n = (\text{Ende} - \text{Anfang}) + 1$$
$$\Rightarrow (150 - 50) + 1$$
$$\Rightarrow \underline{101} = n$$

Jetzt DB: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\rightarrow a_{50} = 10 + (101 - 1) \cdot 8$$
$$a_{50} = \underline{402} \rightarrow \text{Startwert}$$

2. Summe

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$
$$S_{150} = \frac{n}{2} (2 \cdot a_{50} + (n-1) \cdot d)$$
$$S_{150} = \frac{101}{2} (2 \cdot 402 + (101-1) \cdot 8)$$
$$S_{150} = \underline{81'002}$$

Ableitung:

$$\ln(2x) \rightarrow KR$$
$$F(u) = \ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$
$$u(x) = 2x \rightarrow 2 \rightarrow \frac{1}{2x} \cdot 2 \rightarrow \frac{1}{x}$$

Gauss Formel

$$\text{Summe} = \frac{\text{anzahl}}{2} \cdot (\text{erster Wert} + \text{letzter Wert})$$

1. erster Wert: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{50} = 10 + (50-1) \cdot 8$$
$$a_{50} = \underline{402}$$

2. letzter Wert: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{150} = 10 + (150-1) \cdot 8$$
$$a_{150} = \underline{1202}$$

3. Anzahl summieren:

$$(\text{Ende} - \text{Start}) + 1 \Rightarrow 150 - 50 + 1 = \underline{101}$$

4. Alles einsetzen:

$$\frac{101}{2} \cdot (402 + 1202)$$
$$= \underline{81'002}$$

Aufgabe 6 (Rechner nur in Teilaufgabe c, 6 Punkte)

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \ln(2x)$ und $g(x) = 2 \cdot \cos(x)$ über dem Bereich $0 < x < \pi$.

a) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen über dem Bereich und messen Sie die x-Koordinate ihres Schnittpunktes S aus der Skizze. 2P

b) Verwenden Sie das Newton-Verfahren und geben Sie eine Rekursionsformel an zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle von $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. 2P

c) Berechnen Sie mit Ihrer Rekursionsformel den Wert für x_1 (auf vier signifikante Ziffern genau) aus dem Startwert $x_0 = 1.1$. Begründen Sie, ob Ihr Resultat für x_1 plausibel ist. 2P

A6) $f(x) = \ln(2x)$ und $g(x) = 2 \cdot \cos(x)$ und $0 < x < \pi$

a) $x = \underline{2}$

Newton Verfahren

b) $y = f(x) - g(x)$

$$y = \ln(2x) - 2 \cdot \cos(x)$$

Formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$
$$y'(x) = \frac{1}{x} + 2 \cdot \sin(x)$$
$$\therefore x_{n+1} = 1.1 - \frac{\ln(2x) - 2 \cdot \cos(x)}{\frac{1}{x} + 2 \cdot \sin(x)}$$

c) Start = 1.1

Wunsch = x_1

$$x_{0+1} = 1.1 - \frac{\ln(2(1.1)) - 2 \cdot \cos(1.1)}{\frac{1}{(1.1)} + 2 \cdot \sin(1.1)}$$

Begründung:

$$x_1 = 1.14411$$
$$f(1.1) = 0.789$$
$$x_1 = 1.1441$$
$$f(1.1441) = 0.8277$$

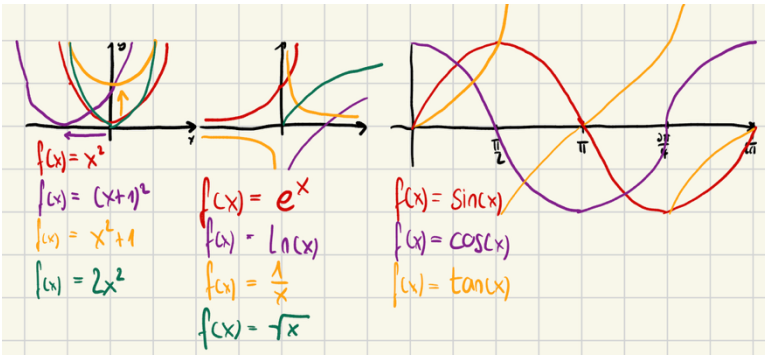
$\rightarrow$ rückt näher an $x=1$ daher Lösung plausibel

Die 4 Regeln der Transformation (Das „Bau-Anleitung“)

Du analysierst die Funktion von **innen nach außen** (oder nach der Reihenfolge der Rechenoperationen).

- 1. **Verschiebung in x-Richtung (Innen)** Steht in der Klammer/Wurzel $x + c$?
 - $x - 2 \rightarrow$ Verschiebung um 2 nach rechts (+2).
 - $x + 1 \rightarrow$ Verschiebung um 1 nach links (-1).
 - Merkregel: Bei x ist alles verkehrtherum!
- 2. **Streckung/Spiegelung an x (Innen)** Steht direkt beim x ein Faktor? (z.B. $\sqrt{-x}$ oder $\sqrt{2x}$)
 - Minus ($-x$): Spiegelung an der **y-Achse** (Graph klappt nach links).
 - Faktor ($2x$): Stauchung in x-Richtung (wird schneller steil).
- 3. **Streckung/Spiegelung an y (Außen)** Steht vor der ganzen Funktion ein Faktor? (z.B. $3 \cdot \sqrt{\dots}$ oder $-\sqrt{\dots}$)
 - Minus ($-\sqrt{\dots}$): Spiegelung an der **x-Achse** (Graph klappt nach unten).
 - Faktor ($3 \cdot \dots$): Der Graph wird dreimal so hoch gezogen (steiler).
- 4. **Verschiebung in y-Richtung (Außen)** Steht ganz am Ende noch eine Zahl? (z.B. $\dots + 1$)
 - $+1 \rightarrow$ Verschiebung um 1 nach oben.
 - $-2 \rightarrow$ Verschiebung um 2 nach unten.
 - Merkregel: Hier ist das Vorzeichen „normal“.

Grund Funktionen:



Beispielanwendung: $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}}$

Wenn du das mit den Regeln aus Kapitel 1.4.3 zerlegst:

- 1. **Grundfunktion:** $\sqrt{x}$ (Start bei 0|0, Bogen nach rechts oben).
- 2. **Innen ($\frac{x}{2}$):** Das ist $\sqrt{0,5 \cdot x}$. Das ist eine Streckung in x-Richtung. Der Graph wird "breiter".
- 3. **Außen (Minus vor der Wurzel):** Spiegelung an der x-Achse. Der Bogen geht jetzt nach unten.
- 4. **Ganz Außen (+1):** Der ganze Graph wird um 1 nach oben geschoben.

$\rightarrow$ Ergebnis: Start bei 0|1, Bogen nach rechts unten.

▲ **Tipp für die Prüfung:** In deinem Skript steht bei 1.4.3 vermutlich auch die Reihenfolge: Erst Spiegeln/Strecken, dann Verschieben! Das ist sicherer.

Vertikales Stauchen (y-Richtung):

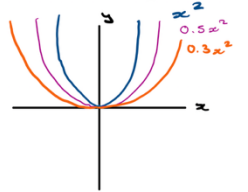
$\rightarrow$ graph wird flacher

• Regel: Multipliziere ganze funktion mit faktor zwischen 0-1

z.B. $f(x) = \frac{x^2}{2}$

$f(x) = 0.5 \cdot x^2$

Bedeutung: Die normale parabel wird auf die hälfte ihrer größe plattgedrückt.



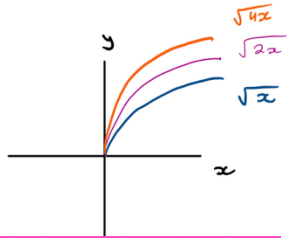
Horizontales Stauchen (in x-Richtung):

$\rightarrow$ Graphen zusammen ziehen.

$\rightarrow$ Für Zahlen $c > 1$, grösser als 1

$\rightarrow$ Formel: $y = f(c \cdot x)$

z.B: $f(x) = \sqrt{4x}$



Sinus: Startet bei (0,0)

$\rightarrow$ Normal: $\sin(x)$ pendelt zwischen -1 und 1

$\rightarrow$ 2. $\sin(x)$: pendelt zwischen -2 und 2, kurven steiler

$\rightarrow$ 0.5 $\cdot \sin(x)$: pendelt zwischen -0.5 und 0.5, Kurve flacher

$\rightarrow \sin(2x)$: Welle doppelt so schnell, braucht nur noch 1 mal π für den durchgang.

$\rightarrow \sin(0.5x)$: Doppelt so lange strecke wie normal, kurve langsamer, braucht mehr π für kurve.

$\rightarrow \sin(x-2)$: Welle startet um 2 nach rechts verschoben

$\rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{2})$: Welle startet früher links, sieht aus wie $\cos(x)$

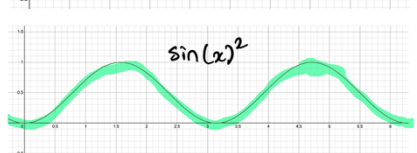
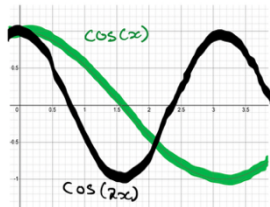
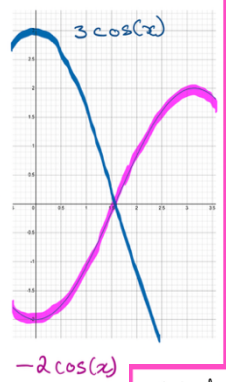
$\rightarrow \sin(x) + 1$: Nulllinie (Mitte der Welle) liegt jetzt bei $y = 1$

Cosinus: Startet bei (0,1)

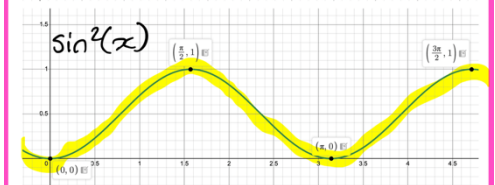
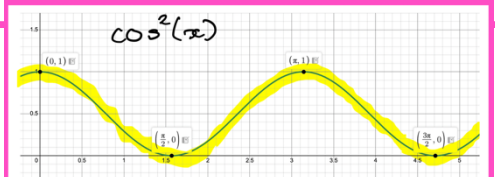
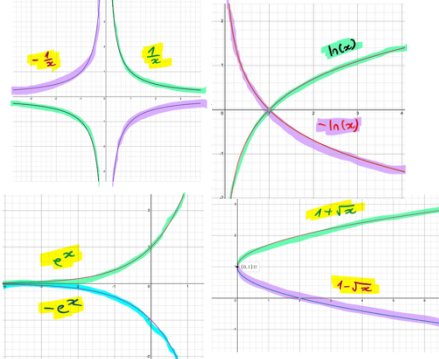
$\rightarrow 3 \cos(x) \rightarrow$ startet bei (0,3)

$\rightarrow -2 \cos(x) \rightarrow$ startet bei (0,-2)

$\rightarrow \cos(2x) \rightarrow$



Spiegelungen der Elementaren f(x):



Kapitel 3:

Ableiten: Wurzel

1. Grundregel:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Speziell für Normalwurzel:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Zurück schreiben:

$$\text{z.B. } \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Wurzeln mit innerer Funktion:

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$\text{z.B. } f(x) = \sqrt{5x^2+3}$$

$$\rightarrow \text{Äußere Ableitung: } \frac{1}{2\sqrt{5x^2+3}}$$

$$\rightarrow \text{Innere Ableitung: } g(x) = 5x^2+3 \rightarrow 10x = g'(x)$$

$$\rightarrow \text{Ergebnis: } \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+3}}$$

Aufgabe 6 (Rechner nur in Teilaufgabe c, 6 Punkte)

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \cos^2(x)$ und $g(x) = x^2$ für $x \in [0, 1.5]$.

a) Skizzieren Sie die beiden Graphen für $x \in [0, 1.5]$ und messen Sie den Wert der x-Koordinate des Schnittpunktes S beider Graphen möglichst genau aus Ihrer Skizze. 3P

b) Geben Sie die Rekursions-Formel nach dem Newton-Verfahren an, um die Nullstelle von $f(x) - g(x)$ numerisch zu approximieren. 2P

c) Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 0.73$ und berechnen Sie x_1 (Resultat: auf die vierte Nachkommastelle gerundet). 1P

1. $\varphi(x) = f(x) - g(x)$
 $\varphi(x) = \cos^2(x) - x^2$
 $\varphi'(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) - 2x$
 $\varphi'(x) = -2\cos(x) \cdot \sin(x) - 2x$

Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$
 $x_{n+1} = x_n - \frac{\cos^2(x_n) - x_n^2}{-2\cos(x_n) \cdot \sin(x_n) - 2x_n}$
 $x_{n+1} = x_n + \frac{\cos^2(x_n) - x_n^2}{2\cos(x_n) \cdot \sin(x_n) + 2x_n}$

Newton Verfahren:

Aufgabe 6 (Rechner nur in Teilaufgabe a, (ii), 6 Punkte)

a) Die Funktionen $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}}$ und $g(x) = \sin(x)$ sind auf Intervall $[0, \pi]$ definiert.

(i) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen über dem Intervall qualitativ und messen Sie die x-Koordinate ihres Schnittpunktes aus der Skizze. 1P

(ii) Verwenden Sie das Newton-Verfahren für $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ und berechnen Sie x_1 aus $x_0 = 0.5$. Geben Sie das Resultat auf die dritte signifikante Ziffer gerundet an. 2P

$$\varphi(x) = 1 - \sqrt{0.5x} - \sin(x)$$
$$\varphi'(x) = -\frac{0.5}{2\sqrt{0.5x}} - \cos(0.5)$$

Startwert $\Rightarrow x_0 = 0.5$

Gewünschter Wert x_1 ?

Formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$$

$$\Rightarrow 0.5 - \frac{1 - \sqrt{0.5(0.5)} - \sin(0.5)}{-\frac{0.5}{2\sqrt{0.5(0.5)}} - \cos(0.5)}$$

$$x_1 = 0.514$$

$$x_1 \approx 0.515$$

Newton Verfahren: Mehrere Iterationen

Startwert $\Rightarrow x_0 = 2$ | $f(x) = x^2 - 5$

Wunsch $\Rightarrow x_3$ | $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{0+1} = 2 - \frac{(2)^2 - 5}{2(2)}$$

$$x_1 = \frac{9}{4}$$

$$x_{1+1} = \frac{9}{4} - \frac{(\frac{9}{4})^2 - 5}{2(\frac{9}{4})}$$

$$x_2 = \frac{161}{72}$$

$$x_{2+1} = \frac{161}{72} - \frac{(\frac{161}{72})^2 - 5}{2(\frac{161}{72})}$$

$$x_3 = 2.23$$

RAD oder DEG!!!

WICHTIG FÜR ANALYSIS

Rechner-Einstellung: IMMER auf RAD (Radian) stellen!

Wann gilt das? Sobald du Funktionen untersuchst mit:

- $f'(x)$ (Ableiten)
- $\int$ (Integrieren)
- Newton-Verfahren
- Tangentensteigung (m)

Besondere Vorsicht bei:

- $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Steht der Rechner hier auf DEG, ist das Ergebnis der Ableitung/Integrals FALSCH!

Merkregel:

"Sehe ich ein $f(x)$, muss das RAD-Zeichen da sein!"

Teleskop Summe:

Normal:

$$\sum_{k=n}^n (a_k - a_{k+1})$$

$\Rightarrow a_n$, der ersten Runde

$\Rightarrow -a_{n+1}$, der letzten Runde

$\Rightarrow a_n - a_{n+1}$

Erste Letzte

$= \dots$

Anders herum:

- c) Berechnen Sie die Teleskop-Summe $\sum_{k=9}^{96} (a_{k+1} - a_k)$ mit $a_k = \frac{2 \cdot k + 1}{k - 1}$ (Resultat: gekürzter Bruch).

Erster Term:

$$(a_{97} - a_9)$$

Term: a_{97} wird im Verlauf weg gekürzt, ignorieren

Letzter Term:

$$(a_{96+1} - a_{96})$$

Term: $-a_{96}$ wird weg gekürzt, ignorieren

Es folgt:

$$a_{97} - a_9$$

$$\rightarrow \frac{2(97)+1}{97-1} - \frac{2(9)+1}{9-1}$$

$$\rightarrow -\frac{11}{32}$$

Auch gleicher umgedrehte Teleskopsumme nur Frage sagt es nicht!

- b) Gegeben ist die Folge $a_m = \frac{3 \cdot m}{m-1}$. Berechnen Sie $\sum_{m=6}^{18} (a_{m+1} - a_m)$ und geben Sie das Resultat als gekürzten Bruch an.

Geo Summe: Wurzel Beispiel

Aufgabe 4 (ohne Rechner, 6 Punkte)

Gegeben ist eine geometrische Folge $a_k = a_0 \cdot q^k$ mit $(k=0, 1, 2, \dots)$ mit lauter positiven Gliedern.

- a) Wir definieren die Folge $b_k = \sqrt{a_k}$ mit $(k=0, 1, 2, \dots)$. Berechnen Sie $\frac{b_{k+1}}{b_k}$ und vereinfachen Sie das Resultat.

A4)

$$a) \quad b_k = \sqrt{a_k}$$

$$\rightarrow \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

$$a_k = a_0 \cdot 2^k$$

$$\frac{\sqrt{a_0 \cdot 2^{k+1}}}{\sqrt{a_0 \cdot 2^k}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$$

$$\sqrt{2^{k+1-k}}$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 2$$

$$\frac{a_0}{1-2} = 1$$

b_k ist Wurzel geo Reihe:

$$\frac{\sqrt{a_0}}{1-\sqrt{2}} = 2$$

3.3.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

$$\text{Summe} = \frac{\text{erstes Glied der Reihe}}{1 - \text{Quotient}}$$

Allgemein für geo reihen und wurzeln:

$$\sqrt{a_{k+1}} = \sqrt{a_k \cdot 2}$$

$\rightarrow$ letztes Glied $= \sqrt{a_k}$

$\rightarrow$ Quotient $= \sqrt{2}$

AUFGABE 3

- a) Eine Studentin plant eine mehrtägige Wanderung. Jede Tagesstrecke ist um 5% kürzer als am vorhergehenden Tag.

- (i) Wie gross ist die insgesamt zurückgelegte Strecke nach 20 Tagen, wenn Sie am ersten Tag 25 km
(ii) Wie lang darf die erste Tagesstrecke maximal sein, damit die gesamte Strecke 180 km nicht überschreitet, wenn Sie nie aufhören würde zu wandern?

A3)

$$i) \quad 2-0.95 \quad \left| \quad S_{20} = 25 \cdot \frac{1-0.95^{20}}{1-0.95} \right.$$

$$a_1 = 25 \quad \left| \quad S_{10} = 320,75 \text{ km} \right.$$

$$a_{20} = ?$$

$$ii) \quad S_n = 180 \text{ km}$$

$$a_1? \quad q = 0.95$$

$$\text{Ende} = 180 \text{ km} \quad n \rightarrow ?$$

Unendliche Geometrische Reihe:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$180 = \frac{a_1}{1-0.95}$$

$$180 = \frac{a_1}{0.05} \quad | \cdot 0.05$$

$$a_1 = 9 \text{ km}$$

c)

2 Gleichungen:

$$I \quad \frac{a_0}{1-2} = 1$$

$$II \quad \frac{\sqrt{a_0}}{1-\sqrt{2}} = 2$$

Lösen:

$$I \quad \frac{a_0}{1-2} = 1 \quad | \cdot 1-2$$

$$a_0 = 1-2$$

$$II \quad \frac{\sqrt{a_0}}{1-\sqrt{2}} = 2$$

$$\text{erstes: } \frac{\sqrt{1-2}}{1-\sqrt{2}} = 2 \quad | (\dots)^2$$

Binom

$$\frac{(\sqrt{1-2})^2}{(1-\sqrt{2})^2} = 2^2$$

$$\frac{1-2}{1-2\sqrt{2}+2} = 4 \quad | \cdot 1-2\sqrt{2}+2$$

$$1-2 = 4(1-2\sqrt{2}+2)$$

$$1-2 = 4-8\sqrt{2}+8 \quad | +8\sqrt{2}$$

$$1+8\sqrt{2}-2 = 4+4\sqrt{2} \quad | -1$$

$$8\sqrt{2} = 3+4\sqrt{2} \quad | (\dots)^2$$

$$(8\sqrt{2})^2 = (3+4\sqrt{2})^2$$

$$64 \cdot 2 = 25 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 1 \quad | -64 \cdot 2$$

$$25 \cdot 2 - 34 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$\frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25}$$

$$\frac{21 = 1}{22 = \frac{9}{25}} \downarrow$$

$$\text{Einsetzen in Anfang: } \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{2} = 0$$

$$\rightarrow \text{nicht durch 0}$$

$$\text{Nenner}$$

$$\text{Also } q \text{ muss } = \frac{9}{25}$$

10

