

Analysis 1

Stefan Küttel

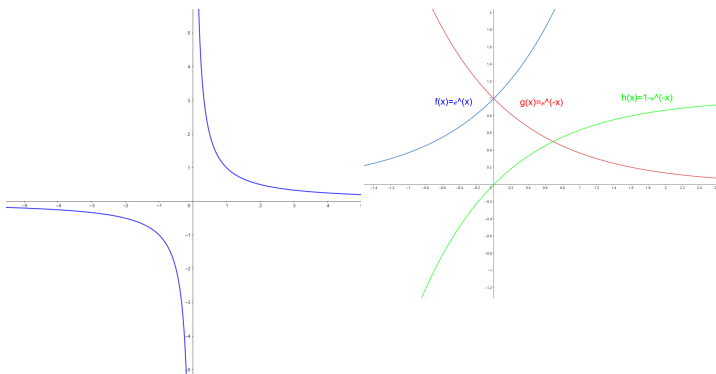
Version: April 15, 2026

Definitonen

Grundform: $f(x) = ax^2 + bx + c$
 Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
 Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - d)^2 + e \rightarrow$ mit $(\frac{b}{2a})^2$ erweitern
 $S = (-\frac{b}{2a} | \frac{4ac - b^2}{4a})$

Muss man wissen

Kehrwertfunktion: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ Beispiele für Polynome:



Pythagoras im Einheitskreis: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1, \sin(x)^2 = (\sin(x))^2$

$\ln(x) \rightarrow$ Umkehrfunktion

$$\ln(e^x) = x, (x \in \mathbb{R})$$

$$e^{\ln(x)} = x, (x > 0)$$

Reelle Folgen

Nullfolgen \rightarrow Folgen mit Grenzwert 0, Beispiele:

$$a_n = \frac{1}{n+1}, b_n = \frac{n}{n^2+1}, c_n = 2^{-n}$$

Kein Grenzwert \rightarrow divergent, Beispiele:

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}, b_n = \sin(n), c_n = 2^2, d_n = (-1)^n$$

Reelle Funktionen

stetig = Funktion ohne Sprünge

$$x \mapsto x^2, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto 10^x, x \mapsto \log_{10}(x)$$

$$\text{Betrug: } |x| = \begin{cases} -x & \text{für } (x < 0) \\ x & \text{für } (x \geq 0) \end{cases}$$

Eindimensionale Bahnfunktion:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t), [\omega] = \frac{rad}{s}, \text{ Amplitude } A = \frac{maxH ub}{2}$$

$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \varphi \rightarrow$ Phasenverschiebung nach links wenn positiv

$$\text{Frequenz: } f = \frac{\omega}{2\pi}, [f] = \frac{1}{s} = Hz$$

$$\text{Schwingungsdauer / Periode: } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

harmonische Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$$T \text{ von } \sin(\omega t) = \frac{2\pi}{\omega}$$

Die Ableitung

Steigung: $\frac{\Delta x}{\Delta t}, (y = mx + b)' = m, m = \tan(\alpha)$
 Idee, momentane Geschwindigkeit zur Zeit t: $v = \lim_{h \rightarrow 0}$

Rechenregeln:

- Faktor und Summenregel: $(a \cdot f(x) + b \cdot g(x))' = a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x)$
 - Skalierungsregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
 - Additionsregel: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Kettenregel: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Grundfunktionen:

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$
 $(e^x)' = e^x, (\ln(x))' = \frac{1}{x}, (a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$
 $\sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x), \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$
 $(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}, (a^{g(x)})' = a^{g(x)} \ln(a) \cdot g'(x)$

Beispiele:

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})' = (-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})' = (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

Die Auflistung (Integrieren) Fläche berechnen

Rechenregeln:

Skalierungsregel: $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$
 Additionsregel: $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
 Erste Substitutionsregel: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$
 $g'(x) dx = du$

Beispiele:

Potenz: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 Kehrwert: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$
 Exponential: $\int e^x dx = e^x + C, \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$
 Sinus: $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
 Cosinus: $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + C$
 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$
 $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-1} = -\frac{1}{x} + C = -x^{-1} + C$

Spezialfälle:

Streckung/Verschiebung in x: $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$
 Produkt aus f und f': $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C$

Quotient aus f und f': $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

$$v(t) = v \Rightarrow \text{konstant}, s = v(t_2 - t_1)$$

$$v(t) = t \Rightarrow x(t) = \int v dt = \frac{1}{2} t^2 + C, s = x(t_2) - x(t_1)$$

Bestimmtes Integral

Fläche unter der Kurve, jeweils von Nullstelle bis Nullstelle zusammenrechnen.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(t)|_a^b$$

Polynomdivision: Dividend / Divisor = Quotient

- Sortieren (höchste Potenz zuerst)
- Auffüllen (fehlende Potenzen mit $0x^y$)
- Höchste Potenz durch höchste Potenz teilen und hinter Gleich schreiben
- neuster Quotient * Divisor von Dividend abziehen (darunter schreiben)
- nächsten Summanden runterziehen

6. wiederholen bis 0

Beispiele:

$$\int_0^1 1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

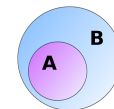
$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2|_0^1 = \frac{1}{2} 1^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Mengen, Zahlen, Intervalle, Gleichungen

Mengen

$A \subset B, A \subseteq B$, Teilmenge:



$A \setminus B$, Komplement:



$C \not\subseteq D$, nicht Teilmenge:



$A \cup B$, Vereinigung (incl. or):



$A \cap B$, Schnittmenge:



$A \Delta B$, Vereinigung (excl. or):



Disjunkt, wenn Durchschnitt = $\{ \}$.

Produktmenge: $A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$ Menge aller Paare.

Intervalle

Beispiele:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \rightarrow D := [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow D :=]-1, 1[$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \rightarrow D :=]-\infty, -1] \cup [1, \infty[= \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$$

Gleichungen

Die Wurzel ist die nicht-negative Lösung einer Gleichung $x^2 = a$. Die Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
 Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!! Am Ende einsetzen!!

Bisektion Finde x mit $f(x) = 0$

0. Gleichung nach x umformen

- Bestimme a, b, sodass $f(a) \cdot f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Falls f stetig ist, gibt es eine Nullstelle in $]a, b[$
- Wiederhole: $m = \frac{a+b}{2}$ falls $f(a) \cdot f(m) < 0, b = m$ sonst $a = m$

Zahlenbeispiel:

a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)
0	2	1	-6	10	-5
1	2	1.5	-5	10	-4.73
1.5	2	1.75	-4.73	10	-3.38
1.5	1.75				

Betragsgleichung: Nullstellen, Intervalle testen, Klammern bei TR!

Abbildungen, Graphen

Fixpunktiteration:

$$f(x) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \text{Nullstellenform}$$

$$f(x) \stackrel{!}{=} x \rightarrow \text{Fixpunktform}$$

Erzeugt die Folge $x_{k+1} = F(x_k)$. Wenn die Folge konvergiert und stetig ist, dann gegen den Fixpunkt von F, also die Lösung.

$$\begin{aligned} x_k &\rightarrow x_*, (x \rightarrow \infty) \\ |x_{k+1} - x_k| &\rightarrow 0 \\ x_{k+1} &= F(x_k), |F(x_k) - x_k| = 0 \end{aligned}$$

Beispiel: (mit Wert beginnen und immer ANS wieder einfügen)
 $x = \cos(x)$ konvergiert zu ≈ 0.739085
 $x = \cos(2x)$ geht nicht.

Definition 174 Eine Abbildung f von der Menge A in die Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element a von A genau ein Element b von B zuordnet.

SPEICHERWEISEN: f : Zuordnung, Funktion.

A : Startmenge, Ausgangsmenge, Definitionsbereich von f ,
 B : Zielmenge, Zielbereich, Wertevorrat, Wertemenge von f ,
 a : Argument, Stelle, Startwert, Variable, Unabhängige,
 b : Bild, Wert, Abhängige von f an der Stelle a .

Graphmenge: (alle Paare) $\Gamma(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ g: B &\rightarrow C \\ g \circ f: A &\rightarrow C, g \text{ nach } f, g(f(x)) \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = x$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Singularität bzw. Definitionslücke:

enn eine Bestimmte Stelle nicht definiert ist.

hebbar: Wenn Folge konvertiert und funktionswerte auch.

$$x_j \rightarrow \xi \Rightarrow f(x_j) \rightarrow 1$$

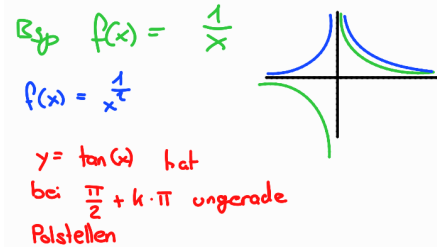
$$f(x) := \begin{cases} f(x) & (x \neq \xi) \\ \eta & (x = \xi) \end{cases}$$

$$\text{Beispiel: } f(x) = \frac{x}{x}, \forall x \neq 0: f(x) = 1$$

Polstellen:

Folge der Funktionswerte konvergiert. Einpunktig.

Beispiele:



Sprungstellen:

def. Lücken bei denen Grenzwerte existieren, aber die Rechnung eine Rate spielt

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 3x} = \frac{x}{x-3}$$

nicht def bei $x = 3, 0, 3$
 $x=0$ ist hebbar
 $x=3$ ist Abstelle

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1!$$

Sin und Cos:

$$\text{Schnittpunkte: } \sin(x) = \cos(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Nullstellen:

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Extrema:

$$\sin(x) : \begin{cases} \text{Maximum: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & f(x) = 1 \\ \text{Minimum: } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, & f(x) = -1 \end{cases}$$

$$\cos(x) : \begin{cases} \text{Maximum: } x = 2\pi n, & g(x) = 1 \\ \text{Minimum: } x = \pi + 2\pi n, & g(x) = -1 \end{cases}$$

Wichtige Eigenschaften:

Periode: 2π

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$\cos(x)$ ist gerade: $\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(x)$ ist ungerade: $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Definitionsbereich

$f(x), g(x)$ stetig in x_0 $f+g, f \cdot g, f/g, f(g(x))$ stetig
 Nenner Nullstelle könnte Polstelle sein.

Bildmenge: nach x umformen und schauen, was für y nicht eingetragen werden kann.

$$\text{Beispiel: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow D(f) =]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Umkehrfunktion

$$f(x) = y \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

Spiegelung $f(x)$ an der Winkelhalbierenden $x = y$.

Wenn $(x, y) \in \Gamma(f)$, dann $(y, x) \in \Gamma(f^{-1})$

$f(x) = x^2$ kann nicht eindeutig invertiert werden. Inverse: $x = \pm\sqrt{y}$

Einschränkung: $f: \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ ist invertierbar, $y = x^2$ und $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

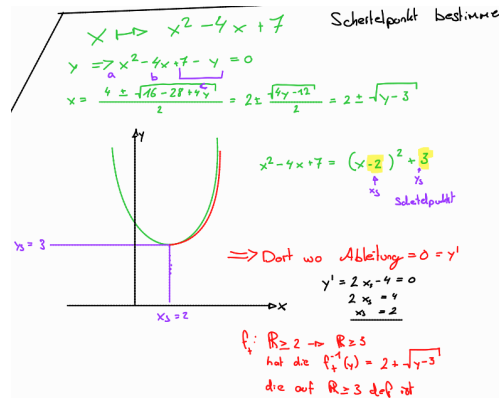
Beispiele:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f^{-1} = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = e^x \Rightarrow g^{-1} = \ln(x)$$

$$y = \sin x \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

$$\arcsin \Rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Folgen

Arithmetisch / Linear

$$\begin{aligned} a_n &= An + B \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_0 &= B \\ a_{n+1} &= a_n + A \end{aligned}$$

$$a_{n+k} = a_n + k \cdot A$$

$$\text{Grundformel: } S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$$

$$\text{Formel: } \sum_{k=0}^n a_k = (n+1) \cdot \frac{a_n + a_0}{2} = S_n$$

a_0 = erstes Glied
 a_n = letztes Glied
 $n+1$ = Anzahl Glieder

$$\text{Anz. Glieder} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\text{erstes} + \text{letztes})$$

Geometrisch / exponentiell

$$\begin{aligned} a_n &= C \cdot Q^n \\ a_n &= a_1 \cdot Q^{n-1} \\ a_0 &= C \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = Q \cdot a_n$$

$$a_{n+k} = a_n \cdot Q^k$$

$$\text{Start bei 0: } S_n = C \cdot \frac{1-Q^{n+1}}{1-Q}$$

$$\text{Start bei 1: } S_n = CQ \cdot \frac{1-Q^n}{1-Q}$$

$$\sum_{k=a}^b k^2 = \frac{b(b+1)(2b+1)}{6} - \frac{(a-1)a(2a-1)}{6}$$

Harmonisch

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{a_n}$$

$$\text{Einsetzen in } a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

Summenfolgen

$$\text{Teleskopsummen: } S_n = \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(1)$$

Newtonsches Tangentenverfahren

z.B.: $\sqrt{17}$ berechnen. $x = \sqrt{17} \cdot f(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 17$
 x_0 als startwert möglichst in der Nähe der Nullstelle.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Kurvendiskussion

Nullstellen: einfach: $f(x) = 0, f'(x) \neq 0$, Vorzeichenwechsel
 doppelt: $f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$, kein Vorzeichenwechsel
 dreifach: $f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$, Vorzeichenwechsel

Krümmung: rechts, konkav, $f''(x) < 0 \rightarrow$ links, konvex, $f''(x) > 0$

Spezielle Punkte:

Wendepunkt: $f'''(x_0) = 0$ (Krümmung wechselt)

Sattelpunkt: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$

Asymptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - g(x)| = 0$

Symmetrien:

gerade: Spiegelung an Y-Achse, $f(-x) = f(x)$, Exponenten nur gerade

ungerade: Spiegelung an 0-Punkt, $f(-x) = -f(x)$, Exponenten nur ungerade

Bernoulli

$$\text{Für } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dif-Rechnung

Differenzenquotient: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, mittlere

Differentialquotient: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, momentane

Tangente: $t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi)$, Berührungspunkt: $(\xi, f(\xi))$