Lineare Algebra 1

Stefan Küttel

Version: April 9, 2026

Definitionen

Natürliche: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3...\} \rightarrow +, \cdot$
Ganze: $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3...\} \rightarrow \pm, \cdot$
Rationale: $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \pm, \cdot, \div$
Irrationale: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} := \{\pi, e, \sqrt{2}, ...\} \rightarrow$ Zahlen die nicht als Bruch darstellbar
Komplexe: $\mathbb{C} := \{z | z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

Körperaxiome: Körper = Menge von Objekten (Zahlen)
Additionsgesetze:
i. Assoziativ (darf überall Klammern setzten)
$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
ii. Neutralelement (Existenz der **Null**)
$\exists n \in \mathbb{R} : x + n = x, \forall x \in \mathbb{R}$
iii. Inverses Element (Existenz von Negativen)
$\exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
iv. Kommutativität (Reihenfolge egal)
$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Multiplikationsgesetze:
v. Assoziativität
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
vi. Neutralelement (Existenz der **Eins**)
$\exists e \in \mathbb{R} : x \cdot e = x, \forall x \in \mathbb{R}$
vii. Kehrwert (Inverses Element)
$\exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
viii. Kommutativität (Reihenfolge egal)
$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Kombiniert:
ix. Distributiv (Ausklammern)
$x \cdot (y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Null als komplexe Zahl (Axiom ii)
$0 + 0i$ z.B.: $(2 + 3i) \cdot (0 + 0i) = 2 + 3i$

Existenz des negativen (Axiom iii)
$z = x + yi \Rightarrow -z = -x - yi$

Existenz des Kehrwerts (Axion vii)
$z = x + yi \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} \Rightarrow$ muss immernoch komplex (x+yi) sein

---

Komplexkonjugation:
$$z = \underbrace{x}_{\text{Realteil Re(z)}} + \underbrace{y}_{\text{Imaginärteil Im(z) ohne i}} \cdot i$$
$z = x + yi \Rightarrow \overline{z} := x - yi$ Beim Im() das Vorzeichen wechseln $\neq -z$

Division durch komplexe Zahl:
mit Komplexkonjugation erweitern $\Rightarrow \frac{n}{x+yi} \cdot \frac{n(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} \Rightarrow$ 3. Binom im Nenner $(x^2 - y^2)$

Betrag:
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Potenzen von i:

$i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ $\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$ $\quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$ $\quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$ $\quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1.$

Eigenschaften:

1. $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
2. $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{z \cdot i}$
3. $z = \overline{z}$, wenn $z \in \mathbb{R}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
7. $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$

Kartesische- / Polarform

Kartesisch: $z = (x + yi)$
Polar: $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)), r = |z|$
Polar $\rightarrow$ **Kart.:**
$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \sin(\varphi)$
Kart. $\rightarrow$ **Polar:**
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argument:
Obere Halbebene: $\varphi = \arccos(\frac{x}{r})$
Untere Halbebene: $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r})$
Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$
Multiplikation:
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$
$cis(x) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

Vektoren

Standardraum: $\mathbb{K}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n \right\}$

Rechenregeln: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_y \\ \vdots \\ y_1 + y_n \end{pmatrix}, \lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

Vektoraxiome

Addition

1. Assoziativität: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = x + (\vec{y} + \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{K}^n$
2. Neutralelement: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \forall x \in \mathbb{K}^n$
3. Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{K}^n : \vec{x} + (\vec{-x}) = 0$
4. Kommutativität: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$

Skalarmultiplikation

5. Assoziativität: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x} \in \mathbb{K}^n$
6. Neutralität der Eins; $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$

Kombiniert

7. $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$
8. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Spezielle Vektoren:

Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Gegenvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \vec{-x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Ortsvektor: $\vec{r}_p = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$
Geradengleichung: $g : \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}, t =$ Streckung
Punkt Q auf Geraden: $Q = (r_1 + t \cdot v_1 | r_2 + t \cdot v_2 | r_3 + t \cdot v_3)$
Ebenengleichung: $\vec{r}_e = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}, s, t \in \mathbb{R}$

Vektornorm

Standardnorm in $\mathbb{K}^n$**:**
$$||\vec{x}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$$
Standardnorm in $\mathbb{C}^n$**:**
$$||\vec{z}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + ... + z_n \cdot \overline{z_n}}$$

Metrik auf $\mathbb{K}^n$ **(Abstand):** $dist(A, B) := ||\vec{AB}||$
Zahl*Norm (komplex): $||z \cdot \vec{u}|| = |z| \cdot ||\vec{u}||$
Die Norm ist:

1. positiv definitiv: $||\vec{x}|| \geq 0, ||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. absolut homogen: $||\lambda \cdot \vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} \in \mathbb{K}^n$
3. subbadditiv (Dreiecksungleichung): $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$

Normierter Vektor: $\vec{x} \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow ||\vec{x}|| = 1, \vec{e}_x = \frac{1}{||\vec{x}||} \cdot \vec{x}$

Skalarprodukt

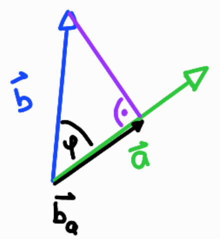
Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$**:**
$$< \vec{x}, \vec{y} > := \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \cdot y_i = \overline{x}_1 \cdot y_1 + \overline{x}_2 \cdot y_2 + ... + \overline{x}_n \cdot y_n$$
Wenn komplex dann komplexkonjugieren von 1 Vektor
Öffnungswinkel: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, < \vec{x}, \vec{y} >= ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos(\varphi)$
$\varphi = \arccos(\frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||})$
Eigenschaften des Skalarproduktes in $\mathbb{R}^n$**:**

1. bilinear:
   $< \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + < \vec{y}, \vec{z} > \& < \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{z} >$
   $< \lambda \vec{x}, \vec{y} >= \lambda \cdot < \vec{x}, \vec{y} > \& < \vec{x}, \lambda \vec{y} >= \lambda \cdot < \vec{x}, \vec{y} >, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
2. symetrisch: $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
3. positiv definitiv: wie bei Norm

Eigenschaften des Skalarproduktes in $\mathbb{C}^n$**:**
$< \vec{w}, \vec{z} >= \overline{< \vec{z}, \vec{w} >}, \forall \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$
$< \lambda w, z >= \overline{\lambda} < w, z > \neq < w, \lambda z >= \lambda < w, z >$

Orthogonalprojektion

Orthogonalprojektion:
$\vec{e}_a = \frac{1}{||\vec{a}||} \cdot \vec{a}$
$\vec{b}_a = \lambda \cdot \vec{e}_a = ||\vec{b}|| \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{||\vec{a}||} \cdot \vec{a}$
$\vec{b}_a = \frac{< \vec{b}, \vec{a} >}{||\vec{a}||^2} \cdot \vec{a}$
$||\vec{b}_{\vec{a}}|| = ||\vec{b}|| \cdot \cos(\varphi)$



$\vec{b}_a$ = orthogonalprojektion
geg: $\vec{a}, \vec{b}$
ges: $\vec{b}_a$

$\vec{a}$ & $\vec{b}_a$ selbe richtung

=> Start mit Einheitsvektor $\vec{e}_a$

$\vec{e}_a = \frac{1}{||a||} \cdot a$

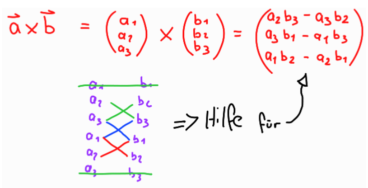
Vektorprodukt

Vektorprodukt / Kreuzprodukt:
Nur in $\mathbb{R}^3$
$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \vec{n} \perp \vec{a}$ & $\vec{n} \perp \vec{b}$
$||\vec{n}|| = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\theta)$

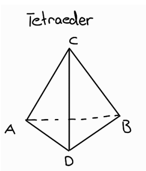
Rechenregeln:
Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ wenn $\vec{a} = \lambda\vec{b}$

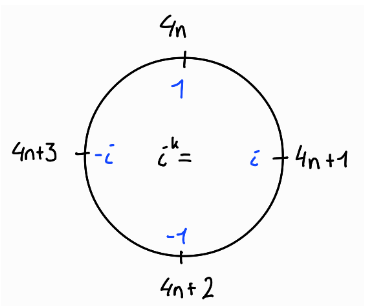
1. Antikommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
   $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
2. Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \forall \vec{a}\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$
3. Ausserdem: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

Kreuzprodukt bilden:



Parallelogram: $A = ||\vec{a} \times \vec{b}||$
Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot ||\vec{a} \times \vec{b}||, \vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AC}$
$A = \frac{||s|| \cdot ||h||}{2} \Rightarrow ||h|| = \frac{2A}{||s||}$
Spat: $V = | < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > |$
Tetraeder: $V = \frac{1}{6} \cdot | < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > |$
$h = \frac{|<\vec{AB} \times \vec{AD}, \vec{AC}>|}{||\vec{AB} \times \vec{AD}||}$
Pyramide: $V = \frac{1}{3} | < \vec{BA} \times \vec{BC}, \vec{BS} > |$
Drehmoment: $M = \vec{r} \times \vec{F}, ||\vec{M}|| = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin(\theta)$
Prisma: $V = \frac{1}{2} | < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > |$





Matrizen

Zeilen zuerst, Spalten später
$m \times n$ Matrix:

$$A = (a_{ij})_{i=1...m, j=1...n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} ... a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} ... a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^{m \times n} := \{A | A = (a_{ij})_{i=1...m, j=1...n}, a_{ij} \in \mathbb{K}\}$

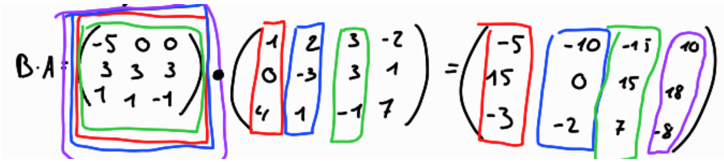
Spezialfälle:
Nullmatrix: alle Einträge = 0
Einheitsmatrix: $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Diagonale = 1, Rest = 0, nur bei $n \times n$ Matrizen

Matrixprodukte

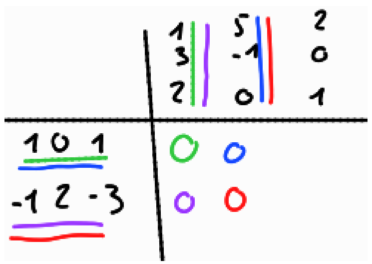
1. Matrix * Vektor = Vektor
Anzahl Spalten der Matrix muss gleich Anzahl Zeilen im Vektor sein!!
$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{K}$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\vec{x}_1 + a_{12}\vec{x}_2 + ... + a_{1n}\vec{x}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\vec{x}_1 + a_{m2}\vec{x}_2 + ... + a_{mn}\vec{x}_n \end{pmatrix}$$

2. Matrix * Matrix = Matrix
Mehrere male Matrix * Vektor nacheinander.
Anzahl Spalten links muss gleich Anzahl Zeilen rechts sein!
$(m \times n) \cdot (n \times l) \Rightarrow m \times l$
Beispiel: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$



Rechenhilfe:



Rechengesetze:
Addition und Skalarmultiplikation erfüllen Vektoraxiome!
$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} ... \\ a_{21} + b_{21} ... \end{pmatrix}$, nur wenn Anzahl Zeilen und Spalten gleich!
$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} ... \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} ... \end{pmatrix}$
Assoziativ: $C \cdot (BA) = (CB) \cdot A$
Distributiv 1: $(C + B) \cdot A = CA + BA$
Distributiv 2: $C(B + A) = CB + CA$
Nicht Kommutativ: $BA \neq AB$
$(C + B) \cdot A \neq AC + AB \rightarrow CA + BA$

Lineare Gleichungssysteme und Gauss

Lineare Gleichungssysteme:

m lineare Gleichungen und n unbekannte $\in \mathbb{K}$ bei uns meistens Reell
$a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$
Alle linearen Gleichungssysteme können als $A\vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden.

Lösungsmenge:
Anzahl Pivotelemente = Rang des LGS bzw. Rang der Matrix $rang(A)$.
Rang = r = Anzahl Zeilen der ZSF welche keine Nullzeilen sind.
ZSF hat $n - r$ Spalten ohne Pivotelemente
LGS hat $n - r$ freie Variablen
n = anzahl Spalten der Matrix A bzw. anzahl Unbekannte.

Bestimmen der Lösungsmenge:
Rückwärtseinsetzen, bis alle x "bekannt" sind.
Schreibweise als $A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \vec{x} =$ (konstanten) + t(Anteil freie Variable t) + ...

Nicht Lineare:
$\sin, \cos, x^y, e^x, x_1 + x_2$ sind nicht-lineare Funktionen. Sehr oft nicht analytisch (von Hand) lösbar.

Gauss-Algorithmus:

Ziel: Zeilen-Stufen-Form und von unten nach oben auflösen.

Regeln:

1. Zeilen dürfen getauscht werden
2. Zeilen dürfen mit $\lambda \neq 0$ multipliziert werden
3. Zeilen dürfen addiert werden

Vorgehen:

0. Die einzelnen Gleichungen nach Potenzen sortieren
1. Eliminationsschritt: Wenn Element oben links $\neq 0$ dann "Pivotelement" $\rightarrow$ addiere Vielfaches der 1. Gleichung, damit unten 0 ensteht. z.B.: $II + 2 \cdot I$, $(\frac{-a_{j1}}{a_{11}})$
2. wieder tauschen, bis $a_{22} \neq 0$, wieder vielfaches der 2. Gleichung addieren. $(\frac{-a_{j2}}{a_{22}})$

Immer auf KGV erweitern, damit keine Brüche entstehen.

Nullzeilen:
Ohne Widerspruch: Alle Unbekannten = 0 und "Resultat" = 0 $\rightarrow$ unendlich Lösungen mit $t \in \mathbb{R}$
Mit Wiederspruch: Alle Unbekannten = 0 und "Resultat" $\neq 0 \rightarrow$ keine Lösung. $\mathbb{L} = \{\}$

Kern einer Matrix

Lösungsmenge = Kern = $ker(A)$

Homogene LGS:
$A\vec{x} = \vec{0}$
Homogene LGS haben immer mind. 1 Lösung, sonst ∞. Der $\vec{0}$ ist immer eine Lösung.
Stützvektor ist immer 0-Vektor, heisst, alles durch den Ursprung.

Fall 1, $rang(A) = n$:
genau 1 Lösung (0-Vektor) da keine freuen Variablen.

Fall 2, $rang(A) < n$:
#Pivots (r) < #Spalten (n)
$\Rightarrow \infty$-Lösungen. In jeder Spalte ohne Pivot 1 freie Variable.
$n - r =$#freie Variablen

Dimension: $dim(kern(A)) = n - r$

Rangsatz: $dim(ker(A)) + rang(A) = n$

Superpositionsprinzip:
jede Lösung $\vec{x}$ des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat
1. partikuläre (spezielle) (irgendeine) Lösung $\vec{x}_p | A\vec{x}_p = \vec{b}$
und eine
2. homogene Lösung $\vec{x}_h | A\vec{x}_h = \vec{0}$
$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, $\mathbb{L} = \{\vec{x}_p + \vec{x}_h | A\vec{x}_p = b, \vec{x}_h \in ker(A)\}$
Irgendeine Lösung finden und homogene Lösung addieren.

LGS mit Parameter:

Prüfungsvorbereitung ges: a für keine, 1, ∞ -Lösungen

$$\begin{aligned} 4ax_1 + x_3 &= 3+2a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 0 & 1 & 3+2a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tauschen, damit Pivot kein Parameter
weil a=0 würde alles zerstören

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4a & 0 & 1 & 3+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6a & 1-2a & 3 \end{array}\right)$$

III + 6a · II

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+4a & 3-6a \end{array}\right)$$

ist Pivot ?
≙
ist $1+4a=0$?

1. Fall: $1+4a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{-1}{4} \Rightarrow \forall a \neq \frac{-1}{4} \Rightarrow$ genau 1. Lösung
$0 \cdot x_3$
2. Fall: $1+4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow 3 + \frac{6}{4} \neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$
widerspruch

3. Fall: $1+4a = 3-6a$
$10a = 2$
$a = \frac{1}{5} \Rightarrow \infty$ Lösungen

falsche Überlegung

$\frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{6}{5}$

$\frac{9}{5}x_3 = \frac{9}{5} \Rightarrow x_3 = 1$

Pivoelement

LU-Zerlegung

$A = (Matrix) \cdot (Matrix) = L \cdot U$
Obere: $n \times n$, $U = (u_{ij})$, $u_{ij} = 0$ falls $i > j$
Untere: $n \times n$, $L = (l_{ij})$, $l_{ij} = 0$ falls $i < j$
Unipotent: wenn alle Elemente auf der Diagonalen =1
Diagonale: $n \times n$, $D = (d_{ij})$, $d_{ij} = 0$ falls $i \neq j$

$$L = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$ ist eine untere Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine unipotente untere Dreiecksmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$ ist eine Diagonalmatrix

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine Diagonalmatrix

Erzeugen:
U : ZSF
L : "Gauss-Schritte", unipotent
Nicht mehr mit kgV sondern mit Brüchen.

Alternative Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 25 & -18 & -13 \\ -15 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$ Gauss schritte, damit 0 entsteht, mit anderer Farbe

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 25 & -18 & -13 \\ -15 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-(-3)\text{I}]{\text{II}-5\text{I}} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -3 & -12 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-4\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-schritte

LGS lösen mit LU-Zerlegung:
$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L \cdot U \cdot \vec{x} = \vec{b}$

1. LU-Zerlegung von Matrix machen
2. $U\vec{x} = \vec{y}$, definieren $\Rightarrow L\vec{y} = \vec{b} \Rightarrow \vec{y}$ ausrechnen mit vorwärtseinsetzen
3. $U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \vec{x}$ ausrechnen mit rückwärtseinsetzen

$L \cdot U \neq A \Rightarrow L \cdot U = P \cdot A$, $P =$ Einheitsmatrix mit Zeilen vertauscht wie bei Gauss.

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} \xrightarrow[P_1]{\text{Zeilen vertauschen}} \dots \xrightarrow[P_2]{\text{Zeil. ve.}} \dots \to L, U \Rightarrow L \cdot U = PA \Rightarrow \boxed{P = P_2 \cdot P_1}$

Transponierte & symetrische Matrizen

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow A^T = (a^T_{ij}), a^T_{ij} = a_{ji}$
Zeilen einer Matrix der Reihe nach in die Spalten schreiben bzw. spiegelung an der Diagonalen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:
1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(AB)^T = B^T A^T$ Achtung Reihenfolge!!

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow < \vec{x}, \vec{y} > = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$

Spur

Nur bei Quadratischen. Trace.

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Symetrische Matrizen

Symetrisch: $A^T = A$
Antisymetrisch: $A^T = -A$

Adjungierte Matrix

Macht nur bei komplexen Sinn.
Zuerst Transponieren & dann Einträge komplexkonjugieren!
$A^* = (a^*_{ij}), a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Rechenregeln:
1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $(AB)^* = B^* A^*$ Achtung Reihenfolge!!

Hermitesche Matrizen

Hermitesch / selbstadjungiert: $A^* = A$
Antihermitesch: $A^* = -A$

Lineare Ausgleichsrechnung

Idee: Möglichst gute Kurve finden, die zu den Messpunkten passt.

Residuum

LGS ist überbestimmt (zu viele Gleichungen mit zu wenig unbekannten.)

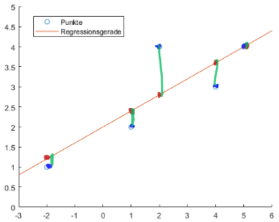
$A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine Lösung. $\Rightarrow A\bar{x} \approx \vec{b}, \bar{x} =$ "optimales $\vec{x}$".

$A\bar{x} = \bar{b}, \bar{b} \approx \vec{b}$, suche $\bar{x}$, dass $||\vec{b} - \bar{b}||$ minimal ist. $||\vec{b} - \bar{b}|| = r =$ Residuum.

3.5.3 Normalengleichung

Geometrische Interpretation

"Methode des kleinsten Quadrate" (Gauss, 19. Jhd)



Suche Minimum vom Residuum

$$r = \|b - \bar{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\bar{m} + \bar{q} \\ \bar{m} + \bar{q} \\ 2\bar{m} + \bar{q} \\ 4\bar{m} + \bar{q} \\ 5\bar{m} + \bar{q} \end{pmatrix} \right\|$$

$\bar{b}$: $A \cdot \bar{x}$

y-Koord. von Punkten

y-Koord. auf optim. Geraden

$$= \sqrt{(1 - (-2\bar{m} + \bar{q}))^2 + \dots + (4 - (5\bar{m} + \bar{q}))^2}$$

$= \sqrt{\text{Summe der quadrierten Abständen}}$

$\rightsquigarrow$ d.h. minimiere Abstand zwischen Gerade, Punkten

Normalengleichung

Wie $||r|| := ||\vec{b} - A\vec{x}||$?

Satz: Ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

überbestimmt ($N > n$) und hat keine Lösung, dann liefert die Lösung der Normalgleichungen

$$A^T A \overline{x} = A^T b$$

denjenigen Vektor $\overline{x}$ als Lösung, welcher den quadratischen Fehler (Residuum)

$$\|r\|^2 = \|b - A\overline{x}\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

minimiert.

$\vec{x}^T \cdot \vec{y} =< \vec{x}, \vec{y} >$
$(A\vec{x})^T = \vec{x}^T \cdot A^T$ Reihenfolge!!

Minimum ist dort, wo Ableitung $= 0$.

Regressionsgerade (optimale Gerade)

1. LGS aufstellen $(xy) \Rightarrow y = m \cdot x + q$
   $\vec{x} = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}$ $\vec{b} =$ y-Koordinaten
   $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$
2. Normalengleichung anwenden $\underbrace{A^T \cdot A}_{C} \cdot \bar{x} = \underbrace{A^T \cdot \vec{b}}_{\vec{y}} \Rightarrow C\bar{x} = \vec{y}$
   $C = A^T A$
   $\vec{y} = A^T \cdot \vec{b}$
3. Gauss
4. Rückwärtseinsetzen
5. Optimale Gerade: $y = \bar{m} \cdot x + \bar{q}$

Optimale Polynomfunktion

1. LGS aufstellen $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 x \dots.$
   $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} =$ y-Koordinaten
   $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}$
2. Normalengleichung anwenden $\underbrace{A^T \cdot A}_{C} \cdot \bar{x} = \underbrace{A^T \cdot \vec{b}}_{\vec{y}} \Rightarrow C\bar{x} = \vec{y}$
   $C = A^T A$
   $\vec{y} = A^T \cdot \vec{b}$
3. Gauss
4. Rückwärtseinsetzen
5. a_0, a_1, a_2 gefunden

Determinante einer Matrix

Existiert nur bei $n \times n$ Matrizen.
Notation: $det(A)$ oder $|A|$.

2×2 Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \vec{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$
$det(A) = det(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$
Vorzeichen der Determinante := Umlaufsinn des Winkels, Uhrezigersinn := Negativ.

Eigenschaften:

1. $det(1_2) = det(e_1, e_2) = 1$
2. 2-Form
   (a) Bilinear:
   $det(\lambda \cdot A) = \lambda^2 \cdot det(A)$
   $det(\lambda a_1, a_2) = \lambda \cdot det(a_1, a_2) = det(a_1, \lambda a_2)$
   $det(a_1 + b_1, a_2) = det(a_1, a_2) + det(b_1, a_2)$
   $det(a_1, a_2 + b_2) = det(a_1, a_2) + det(a_1, b_2)$
   (b) Alternierend: $det(a_1, a_2) = -det(a_2, a_1)$
3. **Geometrisch:** Betrag der Fläche des Parallelograms.

3×3 Matrizen

$det(A) = (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) \cdot \vec{a_3} =< (\vec{a_1} \times \vec{a_2}), \vec{a_3} > \Rightarrow$ Volumen des Spats
$det(\lambda \cdot A) = \lambda^3 \cdot det(A)$

Regel von Sarrus:

Für 3×3-Matrizen gibt es ein Schema (Regel von Sarrus), um die Determinante zu berechnen. Diese Regel funktioniert folgendermassen:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Die Anwendung der Regel von Sarrus liefert:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$n \times n$ Matrizen

$det(1_n) = 1$
$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$
$det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$

Laplacescher Entwicklungssatz

Bei Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen anwenden.

Es gibt eine elegantere Variante, um die Determinante von grossen $n \times n-$Matrizen zu bestimmen. Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

Summe über Zeilen

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)},$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

Summe über Spalten

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Eigenschaften der Determinante

1. $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$
2. $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
3. $det(A^T) = det(A)$
4. $det(U) =$ Produkt der Diagonalelemente $\searrow$
5. $det(L) = 1$
6. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = det(A)^{-1}$
7. $P \cdot A = L \cdot U \Rightarrow det(P) \cdot det(A) = det(L) \cdot det(U)$
   $det(P) = (-1)^k, k =$ Anzahl Zeilentauschs
8. $det(A^n) = det(A)^n$

Inverse Matrix

$\boxed{\textbf{LGS: } A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Regulär: $rang(A) = n$, in jeder Spalte ein Pivot
Singulär: $rang(A) \neq n$
Invertierbar: $A \cdot B = 1_n = B \cdot A \Rightarrow A^{-1} = B$

Voraussetzungen: (alles gleichbedeutend)

1. rang(A) = n
2. A^{-1} existiert
3. A ist regulär
4. $det(A) \neq 0$
5. $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau 1 Lösung
6. ker(A) = 0

Exisitiert nur bei $n \times n$ Matrizen und nur bei $det(A) \neq 0$.

Eigenschaften:

1. $AB \neq BA$ ausser $A^{-1} = B$
2. Eindeutig (Nur 1 Inverse Matrix)
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
6. seien A und B invertierbar, AB auch
   $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Reihenfolge!!

Gauss-Jordan

Ziel: A^{-1} finden, sodass $AA^{-1} = 1_n$. Sprich, Inverse Matrix finden.
Vorgehen:

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix mit $\overline{A|1_n}$
2. Solange Gauss, bis ZSF erreicht
3. Gauss "Rückwärts" sodass über Pivot auch alles "0"
4. Normieren (Einzelne Zeilen so multiplizieren, dass Pivot alle "1")
5. Lösung auf rechter Seite ablesen

Speziell zu beachten: Multiplizieren von Inverser Matrix immer von der gleichen Seite her!

Diagonalmatrix: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, d_1, d_2, d_3 \neq 0$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{pmatrix}$

für 2×2

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - ac} \begin{pmatrix} d & -b \\ -a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exponentialform komplexer Zahlen

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$\underbrace{z}_{komplex} = \underbrace{x + yi}_{kartesisch} = \underbrace{r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}_{polar} = \underbrace{re^{i\varphi + 2k\pi i}}_{exponential}$

Umrechnung:
Polar/Exponential zu Kartesisch:
$x = r \cdot cos(\varphi)$
$y = r \cdot sin(\varphi)$

Kartesisch zu Exponential:
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), y < 0 \\ \text{Nicht def}, x = y = 0 \end{cases}$

Reelle Exponentialfunktion

Beispiel: $\underbrace{f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \alpha \cdot f(t)}_{\text{Ordinary} \to \infty \text{ Lös.}}, \underbrace{f(0) = f_0}_{\text{Anfangsbedingung}}$

$f(t) = e^{\alpha t} \cdot C \Rightarrow f'(t) = C \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} = \alpha f(t)$
mit Anfangsbedingung: $f(0) = f_0 = C \cdot e^{\alpha \cdot 0} \Rightarrow f(t) = f_0 \cdot e^{\alpha t}$

Exponentielles Wachstum

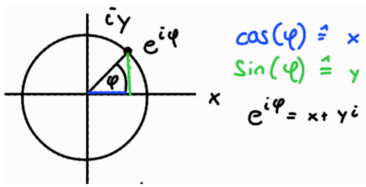
$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ bzw. $e = lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n})^n$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bzw. $e^x = lim_{n \to \infty}(1 + \frac{x}{n})^n$

Exponentialform

$z \in \mathbb{C}$
$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot cis(y)$
$e^{iy} \in \mathbb{C} \to \sqrt{e^0} = 1 =$ Einheitskreis komplex
$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Eulerische Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$



Trig-Funktionen

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$
$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = Re(e^{ix})$
$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = Im(e^{ix})$
$\cos(\ln(x)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Argument

$arg(z) = \varphi$

Immer "kürzester Weg" auf Einheitskreis. $[-\pi; \pi]$

Beispiele:
$arg(i) = \pi/2$
$arg(-i) = -\pi/2$ $arg(1) = 0$
$arg(-2) = \pi$
$arg(5e^{\frac{5\pi}{4}i}) = arg(5 \cdot cis(\frac{5\pi}{4})) = -3\pi/4$
$arg(4 - 3i) = -arccos(\frac{4}{5})$

Rechnen in $\mathbb{C}$

Addition / Subtraktion:
Am besten kartesisch.
$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Multiplikation / Division:
Am besten exponential.
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) + 2k\pi i}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2) + 2k\pi i}$

Potenzen:
Am besten exponential.
$z = r \cdot e^{i\varphi + 2k\pi i} \Rightarrow z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n + 2kn\pi i}$

Potenzen & Wurzeln komplexer Zahlen

$\sqrt[3]{(-8)} \to \sqrt[3]{(-8) + 0 \cdot i}$

Gleichungen mit Potenzen

$z^n = c, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

Vorgehen:

1. In Exponentialform schreiben: $c = r \cdot e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, k \in \mathbb{Z}$
2. n-te $\sqrt{}$ ziehen. n-Lösungen: $z_k = (r \cdot e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i})^{\frac{1}{n}}$
   $= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}i}$
3. evtl. umformen in gefragte Form

$\Rightarrow$ in der komplexen Ebene n-Eck mit Schwerpunkt im Nullpunkt. Gleichseitig.

Komplexe Wurzeln

Hauptzweig: $\sqrt[n]{c} := z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}, \varphi = arg(c)$
$\sqrt{i} = \sqrt{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = cis(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Komplexer Logarithmus

$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$

$a^z = (e^{\ln(a)})^z = e^{\ln(a) \cdot z}$

Hauptzweig: $\ln : z \mapsto \ln(z) := \ln(|z|) + i \cdot arg(z)$

$\boxed{z = r \cdot e^{i\varphi} \mapsto \ln(z) = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi}$