Bilanzieren

Momentane Änderungsrate
= Summe aller Zu- und Abflüsse

Delta der Veränderung einer nicht linearen Änderungsrate über Integral

$$\Delta G_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{G}(t)\, dt$$

Impuls und Kraft

Impuls (Einheit Ns)

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad \text{Definition Impuls}$$

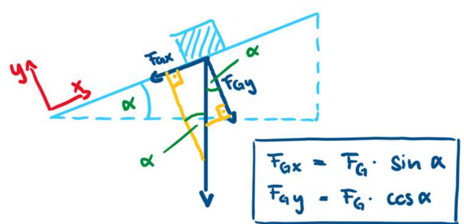
Newton 2
(m = konst., Starrer Körper)

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impuls ist eine Vektorielle Grösse

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{p_x} \\ \overrightarrow{p_y} \\ \overrightarrow{p_z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_x} \\ \overrightarrow{v_y} \\ \overrightarrow{v_z} \end{pmatrix}$$

Aufteilung von Fg auf einer Schiefen Ebene



Arbeit Leistung Energie

Kinetische Energie

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}\, m\, v(t)^2$$

Energieänderung zwischen t_1 und t_2 bei Impulsübertragung

$$\Delta E_{kin,t_1 \to t_2}(t) = \Delta p_{t_1 \to t_2} \cdot \frac{1}{2}\left(\Delta v_{t_1} + \Delta v_{t_2}\right)$$

Arbeit ist Kraft die über eine Strecke aufgewendet wird und somit auch die Potentielle Energie

$$W_F = F \cdot \Delta s = F_1 \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Arbeit entlang eines Pfads
Fläche unter der Kurve im F(s) Diagramm

$$W_{F,s_1 \to s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

Leistung einer Zeitabhängigen Kraft

$$P_F(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Zusammenhang Arbeit und Leistung
Fläche unter der Kurve Leistung pro Zeit ist die Arbeit
=> P = W/t

$$W_{F,t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_F(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

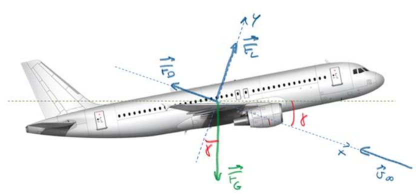
Auftrieb und Luftwiderstand

Statischer Auftrieb auf einen Körper in einem Fluid (Gas oder Flüssigkeit)

$$\vec{F}_A = -m_{Fl} \cdot \vec{g} = -\rho_{Fl} \cdot V \cdot \vec{g}$$

Aerodynamische Kraft

$$\vec{F}_{Aero} = \vec{F_L} + \vec{F_D}$$



Komponenten von F_{Aero}

$$F_L = \frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_L \cdot A$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_D \cdot A$$

Mechanische Schwingungen

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta)$$

Ableitungen der Bewegung

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta$$

Wichtige Formeln

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega_0 = 2\pi \cdot f$$

Energie und Arbeit im Pendel $E_{Sys} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \quad F_{max} = k \cdot x_0$

Kreisbewegungen

Radialbeschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r}$

Bogenlänge auf einem Kreis mit Radius r und Winkel in Abhängigkeit der Zeit $s(t) = \theta(t) \cdot r$

Zusammenhang Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$

Periode bei gleichförmiger Kreisbewegung $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Momentane Winkelgeschwindigkeit gleich $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}\,(t)$

Beschleunigungsvektor:

Bei gleichförmiger Kreisbewegung $\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$

Bei variabler Kreisbewegung
Kommt Tangentialbeschleunigung dazu mit
$\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}$

$\vec{a}(t) = \vec{a}_r(t) + \vec{a}_t(t) = \omega^2 \cdot r + \frac{dv}{dt}$

Resultierende Kraft (zentripetal bei Gleichförmiger Kreisbewegung) $F_{res}(t) = m \cdot a_r(t)$

Resultierende Kraft (zentripetal und tangential bei nicht gleichförmiger Kreisbewegung) $F_{res}(t) = m \cdot a_r(t) + m \cdot \frac{dv}{dt}$

Gravitation und Trägheitsfeld

Gravitationsgesetz Newton
Kraft von Körper 1 auf Körper 2

$$\vec{F}_{G,12} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^2}$$

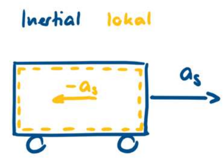
Gravitationsfeld eines Körpers
r = Abstand zum Massenmittelpunkt
Einheitsvektor zeigt Richtung

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G\,M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Im beschleunigten System:

Trägheitsfeld im Inneren eines beschleunigten Systems

$$\vec{g}_{träg} = -\vec{a}_s$$



Zentrifugalkraft

$$F_{ZF} = m\,\omega^2\,r$$

Corioliskraft

$$F_C = 2\,m \cdot \omega\,v \cdot sin\angle(\vec{\omega}, \vec{v})$$

Offene Systeme

Impulsbilanz

$$\sum_i \vec{F}_{Ob,i} + \sum_i \vec{F}_{K,i} + \sum_i \vec{I}_{p,konv,i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = F_{res}$$

Konvektiver Impulsstrom und Massenstrom

$$\vec{I}_{p,konv} = I_m \cdot \vec{v}_m$$

Massenbilanz

$$\dot{m}(t) = \sum_i I_{m,i}\,(t)$$

Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 + \rho\,g\,h = const.$$

Massenfluss

Massenfluss: $I_m = \rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot I_V$

Volumenstrom $\left(\frac{m^3}{s}\right)$

Strömungsquerschnitt (m^2)

$\left(\frac{kg}{s}\right)$

Dichte Fluid $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\left(\frac{m}{s}\right)$

Volumenstrom mit Bernoulli	$\boxed{I_V = v_1 \cdot A_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} - 1)}}}$
Raketengleichung	$\boxed{v_z(m) = c \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)}$
Schubkraft Strahltriebwerk über Massenstrom	$\boxed{F_{Schub} = I_m \cdot (v_{out} - v_{in})}$
Leistung Strahltriebwerk	$\boxed{P = \frac{v_{out} + v_{in}}{2} \cdot F_{Schub}}$
Schubkraft Mantelstromtriebwerk	$\boxed{F_{Schub} = \underbrace{I_{m,K} \cdot (v_{out,K} - v_{in})}_{Schub\ Triebwerk\ allein} + \underbrace{I_{m,M} \cdot (v_{out,M} - v_{in})}_{Zusatzschub\ Mantel}}$

Kinematik des starren Körpers in einer Ebene (2d)

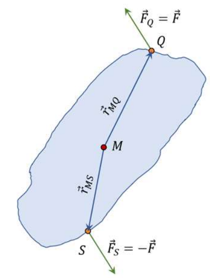
Ortsvektor eines Punkts	$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\,(t) \\ \sin\theta\,(t) \end{pmatrix}}$
Geschwindigkeitsvektor eines Punkts	$\boxed{\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}}$
Momentane Winkelgeschwindigkeit eines Punkts	$\boxed{\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}}$
Betrag des Geschwindigkeitsvektors (Omega als Betrag, dass v(t) immer positiv wird)	$\boxed{v(t) = r \cdot \lvert\omega(t)\rvert}$
Geschwindigkeitsvektor eines Punkts **auf** dem rotierenden starren Körper	$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)}$
Beschleunigungsvektor eines Punkts **Omega = const.**	$\boxed{\vec{a}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}}$
Betrag des Vektors	$\boxed{a(t) = r \cdot \omega^2}$

Beschleunigung eines Punkts **Omega = veränderlich**	$a_t(t) = r \cdot \lvert\dot{\omega}(t)\rvert$ $a_r(t) = r \cdot \omega^2(t)$ $\vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{a}_t(t)} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{=\vec{a}_r(t)}$
Massenmittelpunkt eines Körpers	$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = \frac{1}{m}(m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n)$
Massenmittelpunkt einer Kontinuierlichen Massenverteilung mit Dichte	$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r})\, dV$
Bewegung eines Massenmittelpunks	$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_{MMP}) = m \cdot \vec{a}_{MMP}$

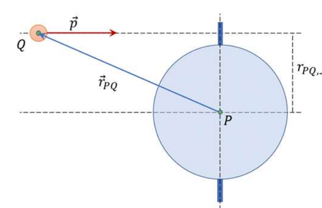
Kinematik des starren Körpers Allgemeine Bewegung

Geschwindigkeit eines Punktes B mit $\vec{v}_P(t)$ (Geschwindigkeit eines Punkts P auf dem Körper) und $\vec{\omega}_P(t)$ (Winkelgeschwindigkeit des Starren Körpers) gegeben	$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t)$
Beschleunigung eines Punkts B mit $\vec{a}_P(t)$ (Beschleunigung eines Punkts P auf den Starren Körper) und $\vec{\omega}(t)$ (Winkelgeschwindigkeit des Starren Körpers) gegeben	$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_P(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}_{PB}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t))$
Momentanpol bestimmen (Punkt wo Geschwindigkeit null ist | kann auch ausserhalb des Körpers liegen)	$\vec{r}_{PM}(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_P(t)}{\omega^2(t)}$

Drehmoment

Drehmomentsvektor einer Kraft bzgl. Punkt P mit Vektorprodukt	$\vec{M}_{\vec{F}_Q,P} = \vec{r}_{PQ} \times \vec{F}_Q$
Betrag des Drehmoments	$\vec{M}_{\vec{F}_Q,P} = r_{PQ} \cdot F_Q \cdot \sin\angle(\vec{r}_{PQ}, \vec{F}_Q) = F_Q \cdot r_{PQ,\perp}$
Drehmoment Kräftepaar (Richtung nicht wichtig nur Abstand zwischen den Punkten)	$\vec{M} = \vec{r}_{SQ} \times \vec{F}$ 
Richtung von Omega bestimmen	

Drehimpuls

Drehimpuls einer Punktmasse am Ort Q mit Impuls $\vec{p}$ bezüglich Punkt P	$\vec{L}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p}$ 
Drehimpulskomponente bezüglich Drehachse entlang $\vec{\omega}$	$L_{\vec{\omega}} = J_{\vec{\omega}} \cdot \omega$
Massenträgheitsmoment des Starren Körpers bezüglich einer Drehachse entlang $\vec{\omega}$	$J_{\vec{\omega}} = \sum m_i \cdot r_{i,\perp}^2$
Drehimpuls des Starren Körpers bei Rotation um Hauptträgheitsachse	$\vec{L}_{HTA} = J_{HTA} \cdot \vec{\omega}$
Eigendrehimpuls des Starren Körpers bei Rotation durch Hauptträgheitsachse durch seinen Massenmittelpunkt	$\vec{L}_{MMP}^{Eigen} = J_{MMP} \cdot \vec{\omega}$

Analog zu Newton 2 ist die Änderungsrate des Drehimpuls gleich Summe aller extern wirkenden Drehmomenten (Änderungsrate Omega ist die Winkelbeschleunigung)	$\dot{\vec{L}}_p = \sum \vec{M}_{ext,P} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$

Drehimpuls und Energie

Kinetische Rotationsenergie des starren Körpers um fixe Achse entlang $\vec{\omega}$	$W_{kin,rot} = \frac{1}{2} \cdot J_{\vec{\omega}} \cdot \omega^2$
Leistung eines Drehmoments $\vec{M}$ bei fester Drehachse	$P_{\vec{M}} = M_{\vec{F}} \cdot \omega$
Arbeit eines Drehmoments für Drehung von θ_1 nach θ_2 bei fester Drehachse	$W_{\vec{M}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\vec{F}}(\theta) \cdot d\theta$
Arbeit des Drehmoments und kinetische Rotationsenergie bei fester Drehachse	$W_{\vec{M}} = \Delta W_{kin,rot}$
Kinetische Energie des Starren Körpers bei freier ebener Bewegung	$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{MMP}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{MMP} \cdot \omega^2$

Eigen und Bahndrehimpuls

Zerlegung des Drehimpuls in Bahn- und Eigendrehimpuls bei freier ebener Bewegung bzgl. O	$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{Bahn} + \vec{L}_{MMP}^{Eigen}$
Bahndrehimpuls eines Starren Körpers bei der Mass m bzgl. O	$\vec{L}_O^{Bahn} = \vec{r}_{MMP} \times m \cdot \vec{v}_{MMP}$
Eigendrehimpuls bzgl. Hauptträgheitsachse entlang $\vec{\omega}$	$\vec{L}_{MMP}^{Eigen} = J \cdot \vec{\omega}$