

Linealg

Imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$

$i^2 = -1$ („ $i = \sqrt{-1}$ “)
 $\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_1 = i, x_2 = -i$
 da $i^2 = -1$ & $(-i)^2 = -1 \cdot -1 \cdot i \cdot i$
 $1 \cdot i^2 \rightarrow 1 \cdot (-1) = -1$
 $\Rightarrow \sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{36 \cdot (-1)} = \sqrt[5]{36 \cdot i^2} \Rightarrow 6i$

i Potenziert

$i^1 = i$
 $i^2 = -1$
 $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
 $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$
 Danach wiederholt es sich
 $i^{50} \Rightarrow 50 \text{ Modulo } 4$
 $50 / 4 = 12, \text{ Rest } 2$
 $\Rightarrow i^{50} = i^2 = (-1)$

Realteil & Imaginärteil

$z = -4 + 7i \Rightarrow \text{Re}(z) = -4, \text{Im}(z) = 7$
 $x + y \cdot i \Rightarrow \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$

Komplex Konjugieren:

$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

Betrag

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r \cdot \bar{z}}$
 $u = 4 + 3i \Rightarrow |u| = \sqrt{4^2 + 3^2}$
 Nicht $f^2 + (3i)^2 = -1$

Darstellung in Gaußscher Ebene

$z = x + yi$
 $\bar{z} = x - yi$
 $|z| = \text{Länge Vektor}$
 \Rightarrow Punkt oder Vektor!

Rechenregeln

- $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

Kartesisch & Polar-Form

Kartesisch: $x + yi$
 Polar: $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
 $r \cdot \text{cis}(\varphi)$

Polarform \rightarrow Kartesisch: Geg: r, φ, x, y ?
 $\Rightarrow x: r \cdot \cos(\varphi) \quad y: r \cdot \sin(\varphi)$
 $\Rightarrow r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \Rightarrow z = x + iy$

Kartesisch \Rightarrow Polar: Geg: x, y, r, φ ?
 $\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\Rightarrow \varphi =$ wenn $y \geq 0$: $\arccos(x/r)$
 wenn $y < 0$: $-\arccos(x/r)$
 $= r \& \varphi \Rightarrow r \cdot \text{cis}(\varphi) \Rightarrow r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
 Bsp $z = i \Rightarrow r = \sqrt{0^2 + 1^2}, \varphi = \arccos(0/1) = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow 1 \cdot \text{cis}(\pi/2)$

Argument

Bsp. $z = 1 + i \Rightarrow \varphi = \pi/4 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ blöd
 \Rightarrow Winkel im Intervall $]-\pi, \pi]$
 $\Rightarrow \arg(1 + i) = \pi/4$

Addition/Subtr. mit - in Klammern

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$$

$a^*z_1 = a(x + y \cdot i) = ax + a \cdot y \cdot i$

Division: $(a + b) / (c - b) = a^2 - b^2$

$$\frac{4 + 3i}{2 + 2i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (2 - 2i)}{(2 + 2i) \cdot (2 - 2i)}$$

Exponentialform

$$z = x + yi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \underbrace{r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi}}_{\text{Exponentialform}}$$

kartesisch Polarform

Umrechnung: kartesisch \rightarrow polar / Exp.

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

+ & - \rightarrow besser kartesisch:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

• & : \Rightarrow besser Exponentialform

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi} \\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi} \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) + k \cdot 2\pi}$$

$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) + k \cdot 2\pi}$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi}}{r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2) + k \cdot 2\pi}$$

Potenzieren: Exponentialform

$$z = r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi} \Rightarrow z^n = (r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi})^n$$

$\Rightarrow r^n \cdot (e^{i\varphi + k \cdot 2\pi})^n$
 $\Rightarrow r^n \cdot e^{i\varphi n + k \cdot 2\pi n}$

Wichtig!

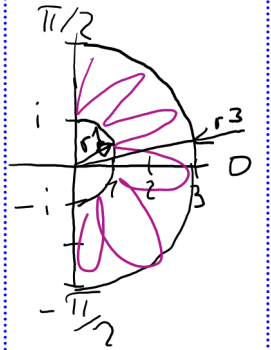
- $\arg(z)$ (φ) $\in]-\pi, \pi]$
- hier bleibt „ $k \cdot 2\pi$ “ (noch) gleich!

Tipps:

- Sich am Einheitskreis vorstellen
 - z komplett machen $\rightarrow i = 0 + 1i$
- Bsp.
- $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$
 - $\arg(-2) = \pi$
- Notfalls: „erweitern“ $(-2 + 0i)$ & mittels Formel φ berechnen!
- $\arg(5e^{\frac{5\pi}{4}i})$
 $\Rightarrow \arg(5 \text{ cis}(\frac{5\pi}{4}))! \Rightarrow \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$
-

Zeichen in \mathbb{C}

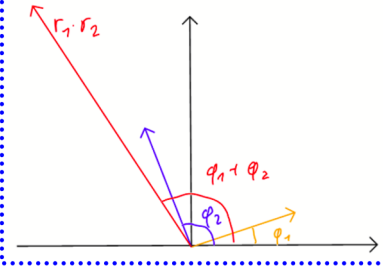
$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3 \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$



$$\text{Bogenmaß} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \text{Gradmaß}$$

$$\text{Gradmaß} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \text{Bogenmaß}$$

Multiplikation: „Streckspiegelung“



Komplexe Wurzeln

+ $k \cdot 2\pi$ hier wichtig!

Bspw. $(-i)^{\frac{2}{3}} \rightarrow (0-i)^{\frac{2}{3}} \rightarrow r=1, \varphi = -\frac{\pi}{2}$
 $\rightarrow (1e^{-\frac{\pi}{2}i})^{\frac{2}{3}} \rightarrow 1^{\frac{2}{3}} \cdot (e^{-\frac{\pi}{2}i \cdot k + 2\pi i})^{\frac{2}{3}}$
 $\rightarrow 1 \cdot e^{-\frac{\pi i}{2} \cdot \frac{2}{3} + k \cdot \frac{4\pi i}{3}} \rightarrow e^{-\frac{\pi i}{3} + k \cdot \frac{4\pi i}{3}}$

Hauptzweig $\rightarrow k=0 \rightarrow e^{-\frac{\pi i}{3}} = \text{cis}(-\frac{\pi}{3})$

Komplexe Gleichungen $k+2\pi$ wichtig!

$z^3 = 5+12i \rightarrow r=13, \varphi = 1,176\dots$

$z^3 = 13 \cdot e^{i\varphi + k \cdot 2\pi} \rightarrow z = 13^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3})}$
 $\rightarrow 13^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i\varphi + k \cdot 2\pi}{3}} \rightarrow 13^{\frac{1}{3}} \cdot \text{cis}(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3})$

$z^3 \rightarrow k=0,1,2 = 3$ Lösungen!

Wie viele Lösungen bei $z^{\frac{1}{2}}$?

Rechnen mit Exponenten

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$

Rechnen mit Logarithmen

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^p) = p \log(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Komplexer Logarithmus

$\text{Ln}(-e^{2i}) \leftarrow$ Exp.-Form bilden!

$\text{Ln}(e^2 e^{-\frac{\pi}{2}i}) \rightarrow$ Logarithmusgesetze

$\text{Ln}(e^2) + \text{Ln}(e^{-\frac{\pi}{2}i}) \rightarrow 2 - \frac{\pi}{2}i$
 Ziel \rightarrow so aufstellen

Kei Plan

$(-i)^{-2\pi i} \rightarrow a^b = e^{\text{Ln}(a) \cdot b}$

$\rightarrow e^{\text{Ln}(-i)(-2\pi i)}$

$r=1, \varphi = -\pi/2$

$\rightarrow e^{\text{Ln}(e^{-\frac{\pi}{2}i})(-2\pi i)}$

$e^{(-\frac{\pi}{2}i)(-2\pi i)} = e^{-\pi^2}$

Exponentialfunktion:

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$z = x + iy \mapsto e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \text{cis}(y).$$

Logarithmus (Hauptzweig):

$$\text{Ln}: \mathbb{C}^* \rightarrow \left\{ w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(w) \leq \pi \right\}$$

$$z \mapsto \text{Ln}(z) := \text{Ln}(|z|) + i \arg(z)$$

$k \cdot 2\pi$ wichtig bei

- Wurzeln
- Potenzen mit Brichen
- \rightarrow (Wurzeln)

Bsp Komplex Potenzieren usw

$$u = 2 - i, v = 2 \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) w = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{3}i + k \cdot 2\pi i}, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^u = e^2 e^{-i} = e^2 \text{cis}(-1) \approx 3.99 - 6.22i$$

$$\frac{v^5}{w^3} = \frac{(2e^{\frac{\pi}{4}i})^5}{(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i})^3} = \frac{2^5 e^{\frac{5\pi}{4}i}}{2^{\frac{3}{2}} e^{-\pi i}} = 2^{\frac{7}{2}} e^{\frac{9\pi}{4}i} = 8 + 8i$$

$$v^2 = 2^2 \text{cis}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 4 \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

Bsp. Komp. Gleichung, Substitution

$$8z^2 - 4z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 8 \cdot 2}}{2 \cdot 8} = \frac{4 \pm \sqrt{48}i}{16} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}i}{16} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm \frac{\pi}{3}i + k \cdot 2\pi i}$$

$$8z^6 - 4z^3 + 2 = 0 \quad \text{Substitution } x = z^3$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{\pm \frac{\pi}{9}i + k \cdot \frac{2\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2$$

$\arg(\varphi)$ nicht wichtig, solange es nicht anders sagt!

Vektoren: Begriffe

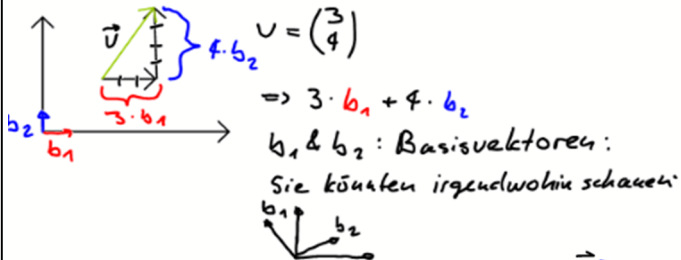
Skalar λ : Eine Zahl aus diesem Körper, $\lambda \in K$
z.B. Masse, Temperatur, Energie...

Vektor x : Ein Pfeil mit einer gewissen Länge und Richtung.

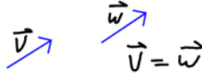
z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Elektrisches Feld, Richtung & Betrag

Aufbau der Vektoren

Vektoren sind bestehen jeweils aus Produkten der **Basisvektoren**:



Vektoren haben keinen "festen" Ort:



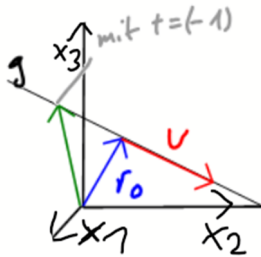
Geradengleichung

$g: r_g = r_0 + t \cdot v, t \in \mathbb{R}$

r_g = Ortsvektor zu beliebigen Punkt auf g

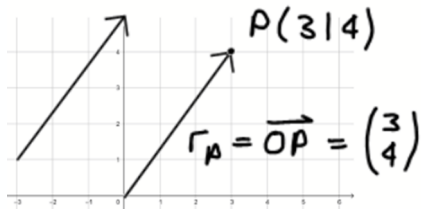
r_0 = Stützvektor

v = Richtungsvektor



Ortsvektor

Zu jedem Punkt $P = (x_1|x_2)$ existiert der Ortsvektor. Auch er hat eigentlich keinen "Ort", man macht den dennoch vom Ursprung aus



Normierter Vektor / Einheitsvektor:

Ein Vektor $x \in K^n$ mit Norm 1, also $\|x\| = 1$.

Wird wie folgt gebildet:

mit $x \in K^n$ als beliebiger Vektor...

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot x$$

Verbindungsvektor

Vektor mit Richtung von

"Punkt $A=(x_1|x_2|x_3)$ zu $B=(y_1|y_2|y_3)$ "

$$\vec{AB} = r_B - r_A = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$$

Öffnungswinkel (nur im \mathbb{R}^n !)

Winkel zwischen Vektoren.

(Definition irrelevant (Cosinussatz))

Wichtig: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$$

Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle$ für K^n

Skalarprodukt: Maß für Winkel

Notationen: $xy, x \cdot y$ oder $\langle x, y \rangle$

(Definition irrelevant (Cosinussatz))

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

Wichtigste Regeln für (\mathbb{R}^n)

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Wichtigste Regeln für (\mathbb{C}^n)

$$\langle c + w, z \rangle = \langle c, z \rangle + \langle w, z \rangle \quad \& \quad \langle c, w + z \rangle = \langle c, w \rangle + \langle c, z \rangle$$

$$\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}, \text{ komplex konjugiert!}$$

Beziehung Norm \leftrightarrow Skalarprodukt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Norm eines Vektors

Norm = Maß für Länge

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Für $x \in \mathbb{C}^n$ sind Betragsstriche wichtig!

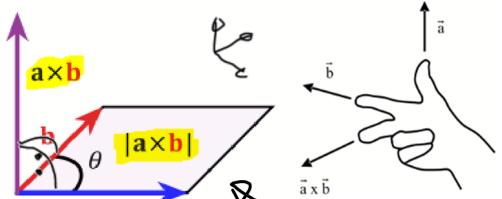
\Rightarrow Betrag der komplexen Zahl nehmen!

$$z = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Betrag komplexer Zahl} \\ |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \end{array}$$

$$\|z\| = \sqrt{|1-i|^2 + |2i|^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Ist ein Vektor (nur in \mathbb{R}^3)
 Mit $a \in \mathbb{R}^3$ & $b \in \mathbb{R}^3$
 $n = a \times b \in \mathbb{R}^3$
 Vektor $n \perp a$ & $n \perp b$



Norm von n ist:
 $\|n\| = \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$
 θ : Öffnungswinkel der Parallelogrammfläche
 $A = \|a\| \cdot h \Rightarrow \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$

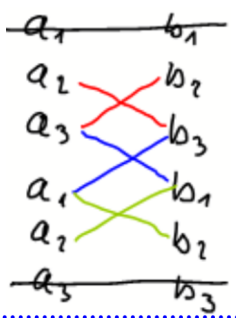
Regeln:
 $a \times b = -b \times a = -(b \times a)$
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
 $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
 $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$

Berechnen des Kreuzproduktes:

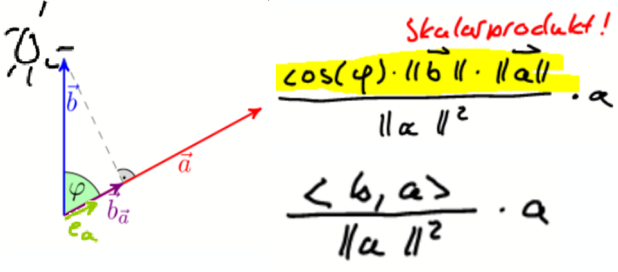
$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Einfacher geht es so:

$$a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2$$



Orthogonalprojektion



Skalarprodukt!
 $\frac{\cos(\varphi) \cdot \|b\| \cdot \|a\|}{\|a\|^2} \cdot a$
 $\frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a$

Anwendungen Vektorprodukt:

Bspw. Dreiecksfläche berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|$$

Volumen eines Spats:

$V = G \cdot h$
 $G = \|a \times b\|$
 $h = \text{Orthogonalprojektion von } c \text{ auf } a \times b$
 $\vec{h} = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|^2} a \times b$
 $\|\vec{h}\| = \frac{|\langle a \times b, c \rangle|}{\|a \times b\|}$
 $\Rightarrow V = G \cdot h = \|a \times b\| \cdot \frac{|\langle a \times b, c \rangle|}{\|a \times b\|}$
 $V = |\langle a \times b, c \rangle|$

Bspw. auch
 andere
 Körper:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

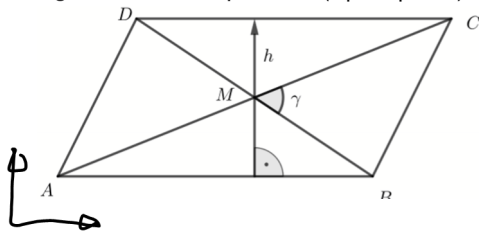
$$V = \frac{1}{6} |\langle a \times b, c \rangle|$$

Das Drehmoment M einer Kraft F und Hebelarm r ist definiert durch

$M = r \times F$
 Richtung:
 Annahme: \vec{r}, \vec{F} in xy -Ebene
 $\Rightarrow M = \vec{r} \times \vec{F}$ zeigt in z -Achse
 \Rightarrow Drehachse
 Norm: $\|M\| = \|r\| \cdot \|F\| \cdot \sin(\theta)$
 $\|F\|$
 (Anteil der Kraft senkrecht zum Hebel)

Beispiel:

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD mit Ecken A(4 | -3 | 3), B(1 | -3 | 0) und Diagonalschnittpunkt M(3 | -2 | 2.5).



Koordinate C & D?

Bei Koordinaten Ortsvektor zum Startpunkt nicht vergessen!

$$C = \vec{OM} + \vec{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{C(2|-1|2)} \\ \text{Gleich für} \end{array} \right\}$$

Gegeben sei der Punkt P(4|5|6) und die Gerade g in Parameterdarstellung:

$$g: r_g = r_0 + t \cdot v = \begin{pmatrix} 17 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Welche Punkte auf der Geraden g haben den Abstand $d = 9$ zum Punkt P?
- Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die Gerade g. Berechnen Sie den entsprechenden Fusspunkt F.

a) Der gesuchte Punkt Q muss auf der Geraden g liegen, also (1 Punkt)

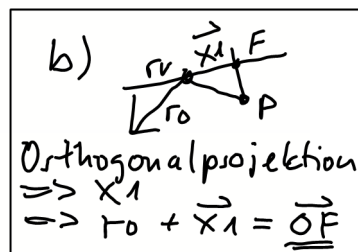
$$Q(17 + 3s | 33 + 8s | 10 - s).$$

Der Abstand zwischen P und Q ist dann (1 Punkt)

$$d = \|\vec{PQ}\| = \left\| \begin{pmatrix} 13 + 3s \\ 28 + 8s \\ 4 - s \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(13 + 3s)^2 + (28 + 8s)^2 + (4 - s)^2} = \sqrt{969 + 518s + 74s^2}.$$

Damit $d = 9$ muss also

$$\begin{aligned} \sqrt{969 + 518s + 74s^2} &= 9 \\ 74s^2 + 518s + 969 &= 81 \\ \Rightarrow s^2 + 7s + 12 &= 0 \\ \Rightarrow s^2 + 7s + 12 &= 0 \\ \Rightarrow (s+3)(s+4) &= 0 \quad \Rightarrow s_1 = -3, s_2 = -4 \end{aligned}$$



Wir erhalten die beiden Punkte $Q_1(8|9|13)$ und $Q_2(5|1|14)$ (1 Punkt).

Matrizen:

Rechteckiges Zahlenschema von Zahlen
 $a_{ij} \in K$ mit m Zeilen & n Spalten

$\Rightarrow A = (a_{ij})$:

$i = 1 \dots m$ & $j = 1 \dots n$

Zeilen m zuerst

Spalten n später

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nullmatrix:

Einheitsmatrix

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $n = \text{Anz. Spalten}$
 & Zeilen

Addition von Matrizen

$A + B$ nur definiert, wenn

$A, B \in K^{m \times n} \Rightarrow$ Spalten & Zeilen Matrizen A & B gleich

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} 2 \times 2$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} 2 \times 2$

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$

Skalar-Matrix

$\lambda \cdot A \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$

Matrix-Vektor

Spalte & Zeile \rightarrow

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$

$A \in K^{m \times n}$ $x \in K^n$ $A \cdot x \in K^m$

\Rightarrow Geht nur, wenn Anz. Spalten Matrix = Einträge im Vektor!

Matrix-Matrix

\Rightarrow Geht nur, wenn Anz. Spalten links = Anz. Zeilen rechts!

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$

$3 \times 2 \cdot 2 \times 2$

$m \times n \cdot m \times n$

$C(BA) = (CB)A$

$(C+B)A = CA + BA$

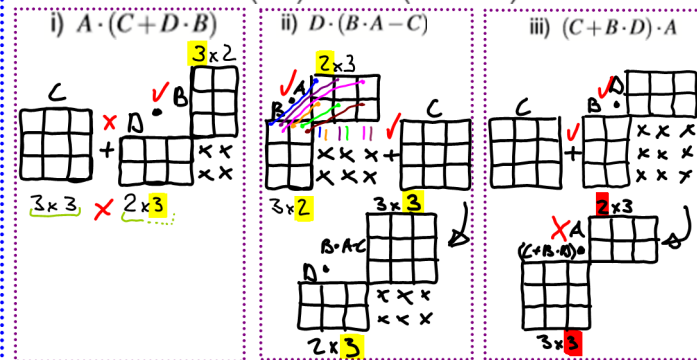
$C(B+A) = CB + CA$

(i.A. $BA \neq AB$)



Rechnen für Retards

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



Lineare Gleichungssysteme in Matrize

$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0$
 $1x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 8$
 $3x_2 + 7x_4 = -2$

LGS geben in Form von

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A \cdot x = b$

$\Rightarrow x$ & b sind Vektoren

Lösen LGS mit Matrize:

- n Zeilen - Stufenform bringen
- Zeilen dürfen vertauscht werden
- Zeile $\cdot \lambda$ wobei $\lambda \neq 0$ ok
- Zeilen addieren, subtrahieren ok

Lösungen, die es geben kann

x_1	x_2		$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$
*	*	*	Punkt im \mathbb{K}^2 .
0	*	*	
x_1	x_2		\Rightarrow Keine Lösung
*	*	*	
0	0	*	
x_1	x_2		$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}$
*	*	*	Gerade im \mathbb{K}^2 .
0	0	0	

Beispiel Matrizen

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \\ ax_2 - ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung?

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & \rightarrow & x_1 & x_2 & x_3 & \rightarrow & x_1 & x_2 & x_3 & \rightarrow & x_1 & x_2 & x_3 & \Rightarrow \text{Kritisch:} \\ \hline \boxed{1} & 1 & a & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & a & 1 & a=0 \\ \Rightarrow & 1 & 0 & 2 & 0 & \text{II}-\text{I} & 0 & -1 & 2-a & -1 & 0 & -1 & 2-a & -1 & 0 & -1 & 2-a & a=1 \\ & 0 & a & -a & 1 & & 0 & a & -a & 1 & \text{III} + a \cdot \text{II} & 0 & 0 & a-a^2 & 1-a & 0 & 0 & a(1-a) & 1-a \end{array}$$

$$a=0: L = \{ \}$$

$$a=1: \infty \text{ Lösungen}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x_3 = t$$

$$-x_2 + t = -1$$

$$-x_2 = -1 - t$$

$$x_2 = 1 + t$$

$$x_1 + 1 + t + t = 1 - 1$$

$$x_1 + 2t = 0$$

$$x_1 = -2t$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ hat es genau 1 Lösung

b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 7, \\ 5x - y - 4z &= a + 7, \\ 2x + y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie heraus, für welche Werte von a das lineare Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung oder keine Lösung hat. Für den Fall von mindestens einer Lösung berechnen Sie diese Lösungsmenge.

b) Wir erstellen mit Hilfe des Gauss-Algorithmus die Zeilenstufenform des linearen Gleichungssystems (2 Punkte)

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & & x & y & z & & x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 & \boxed{1} & -3 & 2 & 7 & \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & a+7 & 0 & \boxed{14} & -14 & a-28 & 0 & \boxed{14} & -14 & a-28 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 0 & 7 & -7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 5-\frac{a}{2} \end{array}$$

Es erweist sich also, dass nur für

$$5 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 10$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems existiert (1 Punkt). Wir setzen also $a = 10$ und berechnen aus der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & & x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 & \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & -14 & -18 & 0 & \boxed{14} & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

die Lösungen $z = t \in \mathbb{R}$ und weiter

$$14y = -18 + 14t \Rightarrow y = -\frac{9}{7} + t,$$

$$x = 7 - 2t + 3\left(-\frac{9}{7} + t\right) = \frac{22}{7} + t.$$

Wir erhalten als Lösung also eine Gerade im \mathbb{R}^3 gegeben durch (1 Punkt)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 22 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kern einer Matrix

Def: Lösungsmenge des homogenen LGS

$A \cdot x = 0$ ist der Rang

$x = x_p + x_h$

partikuläre Lsg $\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

homogene Lsg $\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

partikulärer Teil:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Homogener Teil des LGS: Kern!

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} t \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t/2 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = t, x_1 = t/2$

Fall 1: $\text{rang}(A) = n$

- Rang: Anz. Pivots = Anz. Spalten
 - keine Spalte ohne Pivot-Element
 - keine freie Variable
 - genau 1 Lösung: $\vec{x} = 0$
- $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang 3 Ges: $\ker(A) \Leftrightarrow$ Lösung von $Ax = 0$

3 Spalten $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

$2 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$-5 \cdot x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$1 \cdot x_1 + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Fall 2: $\text{rang}(A) < n$

- Anz. Pivots $r <$ Anz. Spalten n
- $n - r$ Spalten ohne Pivot-Element
- $n - r$ Freie Variablen
- $\dim(\ker(A)) = n - r$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow r = 2$ Pivots $n - r = 3 - 2 = 1$ φ

$n = 3$ Spalten $\rightarrow 1$ freie Variable t

$\Rightarrow \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$x_3 = t$

$x_2 + t = 0 \Rightarrow x_2 = -t$

$x_1 - 5t = 0 \Rightarrow x_1 = 5t$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim(\ker(A)) + \text{rang}(A) = n$ Gerade, 1 dim

$\underbrace{n - r}_{n - r} + \underbrace{r}_r = n$

Anz. freie Variablen: Pivots Anz. Spalten
Spalten ohne Pivots

Rang einer Matrix

$r = \text{rang}(A)$
 $r = \text{Anzahl Pivots}$

LU-Zerlegung:

Regeln:

- Nur abziehen $\Rightarrow + \Rightarrow - (-x)$
- Nur von einer Zeile abziehen: $3 \cdot III - 2 \cdot IX \rightarrow III - 2/5 II$
- Permutationen notieren (unten)

$$A \cdot x = b$$

$$\Rightarrow L \cdot U \cdot x = b$$

x_1	x_2	x_3	b					
2	3	-5	-10	$-2 \cdot I$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 10 & -11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & -46 \end{pmatrix}$		
4	8	-3	-19					
-6	1	4	-11	$-(-3) \cdot I$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 10 & -11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & -46 \end{pmatrix}$		
2	3	-5				Substitution		
U =	0	2	7	L =	2	1	0	$A \cdot x = b$
	0	0	-46		-3	5	1	$\Rightarrow L \cdot U \cdot x = b$

Vorwärtseinsetzen

y_1	y_2	y_3	b
1	0	0	-10
2	1	0	-19
-3	5	1	-11

$$y_1 = -10$$

$$y_2 = 1$$

$$y_3 = -46$$

$$\Rightarrow U \cdot x = y$$

Rückwärtseinsetzen

x_1	x_2	x_3	y
2	3	-5	-10
0	2	7	1
0	0	-46	-46

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = 1$$

Permutationen in Permutationsmatrizen notieren!

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	P_1
---	---	---	---	-------

Bei mehreren Permutationen: $P_{tot} = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$

Danach wieder Vorwärts & Rückwärtseinsetzen

- Bestimmung einer LU-Zerlegung der Matrix A: $P \cdot A = L \cdot U$
- Vorwärtseinsetzen: $L \cdot y = P \cdot b \Rightarrow y$
- Rückwärtseinsetzen: $Ux = y \Rightarrow x$

Transponierte & Symmetrische Matrizen

Transponiert ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

$$A = a_{ji} \Rightarrow A^T = a_{ij} \text{ Zeilen \& Spalten vertauscht}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Regeln:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Symmetrien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- symmetrisch**, falls $A^T = A$.
- anti-symmetrisch**, falls $A^T = -A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrizen ($A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (& $\mathbb{R}^{m \times n}$))

\Rightarrow Zeilen & Spalten vertauschen & komplex konjugieren

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 2-3i \\ -1+i & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 2+3i & -i \end{pmatrix} = B^T$$

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
- $(A^*)^* = A$
- $(AB)^* = B^* A^*$

Hermiteische Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- hermitesch** oder **selbstadjungiert**, falls $A^* = A$.
- anti-hermitesch** oder **anti-selbstadjungiert**, falls $A^* = -A$.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2-3i \\ 2+3i & 2 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 3i & 2-i \\ -2-i & 5i \end{pmatrix}$$

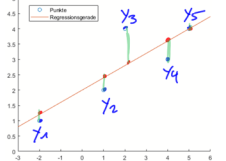
meisten Matrizen sind weder noch!

Spur einer Matrix:

Nur für $n \times n$ -Matrizen
Summe Diagonalen
 $\Rightarrow \text{tr}(A) = 1 - 2 + 5 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Ausgleichsrechnung



Beispiel: \leftarrow aus Aufgabenstellung

Ziel: Gerade $m \cdot x + q$ durch Punktwolke
(-2|1) (1|2) (2|4) (4|3) (5|4)

$$\text{Gleichung: } A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

① Lqs aufstellen

$$\begin{cases} -2m + q = 1 \\ 1m + q = 2 \\ 2m + q = 4 \\ 4m + q = 3 \\ 5m + q = 4 \end{cases}$$

② $A^T \cdot A \cdot x$ Subst: C

$$A^T \cdot C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

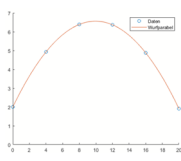
④ $C \cdot x = y$ berechnen

$$m = 2/5 \quad q = 2 \Rightarrow f(x) = 3/5 x + 2$$

m	q	x
50	10	40
10	5	14

Gehört auch für sowas:

x_i	0	4	8	12	16	20
y_i	2	4.93	6.39	6.37	4.88	1.91



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

③ $A^T \cdot b$ Subst: y

$$A^T \cdot y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \end{pmatrix}$$

① $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

- $2 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0$
 $4 \cdot 3 = a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16$
- $A \cdot x = b$ Aufstellen
- & ④ ...

Determinante $\det(A)$ von Matrizen

u. A. für inverse Matrizen

Notation: $\det(A)$ oder $|A|$, nur für $n \times n$!

Spaltenvektoren kann man „kürzen“

$$3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = -24$$

Für 2×2 -Matrizen

$$\det(A) = \det(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 = -24$$

\Rightarrow „Betrag Kreuzprodukt“?

Determinante: „Fläche des Spaltenvektoren“

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 = A$$

Spaltenvektor a_1
Spaltenvektor a_2 \Rightarrow „Vektorprodukt“

Determinante 3×3 -Matrizen:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(a_1, a_2, a_3) := (a_1 \times a_2) \cdot a_3$$

„Spatprodukt“

Nur Notation
 a_1 a_2 a_3 a_1 Spaltenvektor a_1
 a_2 Spaltenvektor a_2
 a_3 Spaltenvektor a_3



Berechnung: Regel von Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + 0 - 6 - 18 - (-40) - 0$$

oder $(0 + 0 - 6) - (18 + (-40) + 0) = 16$

Determinante $n \times n$ -Matrizen

Laplacescher Entwicklungssatz

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

① Zeile/Spalte mit möglichst vielen 0-ern wählen

② Durchnormieren

(Zeile \rightarrow + Spalte \downarrow der Kreise $\circ \circ \circ \circ$)
 (-1)

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+2)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(3+2)} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(4+2)} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sarrus $= 1$ Sarrus $= -3$ $= 0$ $= 0$

③ Zusammenzählen $\Rightarrow \det(A) = 1 + (-3) = -2$

Det $n \times n$ mittels L-U-Zerlegung:

- L-U-Zerlegung durchführen
- $\det(U)$ = Produkt der Diagonalelemente, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist.
- $\det(L)$ = Produkt der Diagonalelemente, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist.
- Bei Permutationen:

$$\text{Bsp. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(U) = 1$ $\det(L) = 1$

$$\det(P) = \begin{cases} 1 & \text{Anzahl vertauschen: gerade} \\ -1 & \text{Anzahl vertauschen: ungerade} \end{cases} \quad (\text{oder Sarrus})$$

$$\det(A) \cdot \det(P) = \det(L) \cdot \det(U) \Rightarrow \det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(U)}{\det(P)}$$

Achtung!
Dafür nur 2 Zeilen
auf Einmal vertauschen!

$$\bullet \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\bullet \det(A^T) = \det(A)$$

$$\bullet \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Potenzieren von
Matrizen & Determinanten

$$\det(A^n) = (\det(A))^n$$

Inverse einer $n \times n$ -Matrix:

Idee $A \cdot x = b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$ Fragen leitend!
 Nur Möglich, wenn $\det(A) \neq 0!$

Gauss-Jordan-Algorithmus
 Idee: $\boxed{A} \cdot \boxed{A^{-1}} = \boxed{\mathbb{1}}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
 $A^{-1}?$

$\boxed{A^{-1}}$ ① „Gauss auf beiden Seiten“

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & \Rightarrow & 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}$$

② Gauss von unten nach oben, sodass

$$\boxed{\mathbb{1}} \quad \boxed{A^{-1}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Inverse 2×2 -Matrizen Nur $2 \times 2!$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

A^{-1} existiert $\Leftrightarrow A$ invertierbar, das heisst...

- #Spalten = #Pivots (nur dann geht Algorithmus)
- $n = \text{rang}(A)$
- A regulär ($n \times n$ & A^{-1} existiert, sonst singular)
- LGS $A \cdot x = b$ hat 1 Lsg.
 $x = A^{-1} \cdot b$
- $\det(A) \neq 0$
- $\ker(A) = \{0\}$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} | \text{nur hier kommutativ} \cdot}$$

Rechnen mit Matrizen

Summen: Kommutativ

Produkte: Nicht kommutativ

Gleichungen: von gleichen Seiten:

$$(\dots) = (\dots) \cdot A$$

$$\boxed{A} \cdot (\dots) = \boxed{A} \cdot (\dots) \text{ oder}$$

$$(\dots) \cdot \boxed{A} = (\dots) \cdot \boxed{A}$$

Bei Summen nicht relevant

$$x? A \cdot X + B \cdot B^T = C \quad | - (B \cdot B^T)$$

$$A \cdot X = C - (B \cdot B^T) \text{ oder}$$

$$A \cdot X = -(B \cdot B^T) + C \quad | \cdot A^{-1}$$

\Rightarrow Summen kommutativ

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - (B \cdot B^T))$$

$$\mathbb{1} \cdot X = A^{-1} \cdot (C - (B \cdot B^T))$$

\Rightarrow Produkte: Seite wichtig

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = (C - B \cdot B^T) \cdot A^{-1}$$

Gelt auch, aber nicht zielführend