Linalg

Imaginäre Einheit i $\mathbb{C}$

$i^2 = -1$ („$i = \sqrt{-1}$")

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_1 = i \quad x_2 = -i$, da $i^2 = -1$ & $(-i)^2 = -1 \cdot -1 \cdot i \cdot i$

$1 \cdot i^2 \rightarrow 1 \cdot (-1) = -1$

$\Rightarrow \sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36 \cdot i^2} = 6i$

i Potenziert

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Danach wiederholt es sich

$i^{50} \Rightarrow 50$ Modulo 4

$50 / 4 = 12$, Rest 2

$\Rightarrow i^{50} = i^2 = (-1)$

Realteil & Imaginärteil

$z = -4 + 7i \Rightarrow Re(z) = -4$, $Im(z) = 7$

$x + y \cdot i \Rightarrow \frac{14 - 2i}{8} \Rightarrow \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot i$ ✓

Komplex Konjugieren:

$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

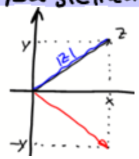
Betrag

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$u = 4 + 3i \Rightarrow |u| = \sqrt{4^2 + 3^2}$

Nicht $\cancel{\sqrt{4^2 + (3i)^2}}$

Darstellung in Gaussscher Ebene



$z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$

$|z|$ = Länge Vektor

$\Rightarrow$ Punkt oder Vektor!

Rechenregeln

❶ $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

❷ $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

❸ $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

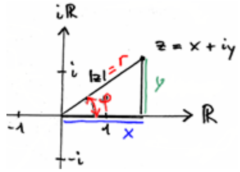
❹ $\bar{\bar{z}} = z$

❺ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

❻ $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

❼ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Kartesische & Polar-Form



Karthesisch: $x + yi$

Polar: $r \cdot (\underbrace{\cos(\varphi)}_{x} + i \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{y})$

$r \cdot cis(\varphi)$

Polarform → Kartesisch: Geg: $r, \varphi, x? y?$

$\Rightarrow x: r \cdot \cos(\varphi) \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$

$\Rightarrow r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \Rightarrow z = x + iy$

Karthesisch ⇒ Polar: Geg: $x, y, r? \varphi?$

$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow \varphi =$ wenn $y \geq 0$: $\arccos(x/r)$

wenn $y < 0$: $-\arccos(x/r)$

$= r \,\&\, \varphi \Rightarrow r \cdot cis(\varphi) \Rightarrow r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Bsp $z = i \Rightarrow r = \sqrt{0^2 + 1^2}$, $\varphi = \arccos(0/1) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 1 \cdot cis(\pi/2)$

Argument

Bsp. $z = 1 + i \Rightarrow \varphi = \pi/4 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ blöd

$\Rightarrow$ Winkel im Intervall $]-\pi, \pi]$

$\Rightarrow arg(1 + i) = \pi/4$

Addition (Subtr. mit − in Klammern)

$\boxed{z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$

Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$

a*z1= a(x+y*i)= a3x + a*y*i

Division: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{4 + 3i}{2 + 2i} = \frac{(4+3i) \cdot (2-2i)}{(2+2i) \cdot (2-2i)}$$

Exponentialform

$$z = \underbrace{x + yi}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}_{\text{Polarform}} = \underbrace{re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}}_{\text{Exponentialform}}$$

Umrechnung: kartesisch → polar / Exp.

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0 \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

+ & − → besser kartesisch:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \implies z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

• & : ⇒ besser Exponentialform

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi i} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi i} \end{aligned}\right\} \implies z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi i} \cdot r_2 e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi i}$$

$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) + k \cdot 2\pi}$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1 + k \cdot 2\pi}}{r_2 \, e^{i\varphi_2 + k \cdot 2\pi}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2) + k \cdot 2\pi}$$

Potenzieren: Exponentialform

$z = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i} \implies z^n = (re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i})^n$

$\Rightarrow r^n \cdot (e^{i\varphi + k \cdot 2\pi})^n$

$\Rightarrow r^n \cdot e^{i\varphi n + k \cdot 2\pi}$

Wichtig!

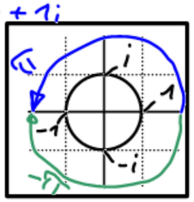
- $arg(z)$ $(\varphi) \in]-\pi, \pi]$
- hier bleibt „$+k \cdot 2\pi$" (noch) gleich!

Tipps:

- Sich am Einheitskreis vorstellen
- z komplett machen → $i = 0 + 1i$

Bsp.

- $arg(i) = \frac{\pi}{2}$
- $arg(-2) = \pi$



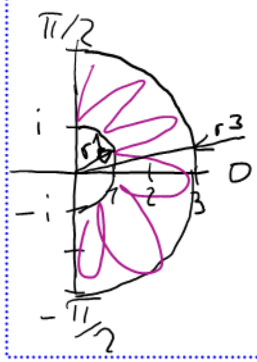
Notfalls: „erweitern" $(-2 + 0i)$ & mittels Formel φ berechnen!

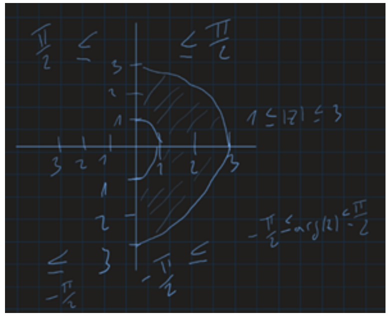
- $arg(5e^{\frac{5\pi}{4}i})$

$\Rightarrow arg(5\, cis(\frac{5\pi}{4}))$! $\Rightarrow \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

Zeichen in $\mathbb{C}$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \leq |z| \leq 3 \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$



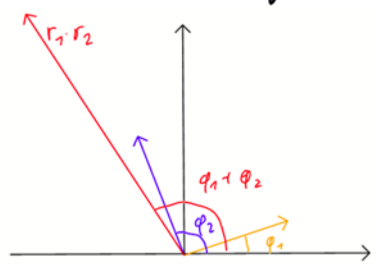


$$\text{Bogenmaß} = \frac{2\pi}{360°} \cdot \text{Gradmaß}$$

$$\text{Gradmaß} = \frac{360°}{2\pi} \cdot \text{Bogenmaß}$$

Multiplikation:

„Streckspiegelung"



Komplexe Wurzeln

+ $k \cdot 2\pi$ hier wichtig!

Bspw. $(-i)^{\frac{2}{3}} \to (0-i)^{\frac{2}{3}} \to r = 1, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\to \left(1e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)^{\frac{2}{3}} \to 1^{\frac{2}{3}} \cdot \left(e^{-\pi/2\, i \cdot k + 2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\to 1 \cdot e^{-\frac{\pi i}{2} \cdot \frac{2}{3} + k \cdot \frac{4\pi}{3}} \to e^{-\frac{\pi}{3} i + k \cdot \frac{4\pi}{3}}$

Hauptzweig $\to$ $k = 0 \to e^{-\frac{\pi}{3} i} = \underline{\underline{\mathrm{cis}(-\frac{\pi}{3})}}$

Komplexe Gleichungen

$k + 2\pi$ Wichtig!

$z^3 = 5 + 12i \to r = 13, \varphi = 1{,}176\ldots$

$z^3 = 13 \cdot e^{i \cdot \varphi + k \cdot 2\pi} \to z = 13^{\frac{1}{3}} \cdot e^{(i \cdot \varphi + k \cdot 2\pi)\frac{1}{3}}$

$\to 13^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i\varphi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}} \to 13^{\frac{1}{3}} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\varphi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$

$z^3 \to k = 0, 1, 2 = 3$ Lösungen!

Wie viele Lösungen bei $z^{\frac{1}{2}}$?

Rechnen mit Exponenten

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$

Rechnen mit Logarithmen

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^p) = p \log(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Komplexer Logarithmus

$\ln(-e^2 i) \leftarrow$ Exp.-Form bilden!

$\ln\left(e^2 e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) \to$ Logarithmusgesetze

$\ln(e^2) + \ln\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) \to \underline{\underline{2 - \frac{\pi}{2} i}}$

Ziel $\to$ so aufstellen

Kei Plan

$(-i)^{-2\pi i} \to a^b = e^{\ln(a) \cdot b}$

$\to e^{\ln(-i)(-2\pi i)}$

$r = 1, \varphi = -\pi/2$

$\to e^{\ln\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)(-2\pi i)}$

$e^{\left(-\frac{\pi}{2}i\right)(-2\pi i)} = e^{-\pi^2}$

Exponentialfunktion:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$z = x + iy \longmapsto e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \mathrm{cis}(y).$$

Logarithmus (Hauptzweig):

$$\ln : \mathbb{C}^* \longrightarrow \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\pi < \mathrm{Im}(w) \leq \pi \right\}$$

$$z \longmapsto \ln(z) := \ln(|z|) + i \arg(z)$$

$k \cdot 2\pi$ Wichtig bei
- Wurzeln
- Potenzen mit Brüchen
$\to$ (Wurzeln)

Bsp Komplex Potenzieren usw

$u = 2 - i, \quad v = 2\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad w = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i + k \cdot 2\pi i}, k \in \mathbb{Z}.$

$$e^u = e^2 e^{-i} = e^2 \mathrm{cis}(-1) \approx 3.99 - 6.22i$$

$$\frac{v^5}{w^3} = \frac{\left(2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^3} = \frac{2^5 e^{\frac{5\pi}{4}i}}{2^{\frac{3}{2}} e^{-\pi i}} = 2^{\frac{7}{2}} e^{\frac{9\pi}{4}i} = 8 + 8i$$

$$v^2 = 2^2 \mathrm{cis}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 4\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

Bsp. Kompl. Gleichung, Substitution

$$8z^2 - 4z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 8 \cdot 2}}{2 \cdot 8} = \frac{4 \pm \sqrt{48}i}{16} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}i}{16} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm \frac{\pi}{3}i + k \cdot 2\pi i}$$

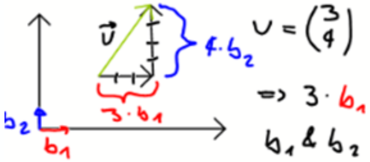
$8z^6 - 4z^3 + 2 = 0 \qquad$ Substitution $x = z^3$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} e^{\pm \frac{\pi}{9}i + k \cdot \frac{2\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2$$

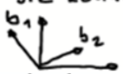
arg(φ) nicht wichtig, solange er es nicht anders sagt!

Vektoren; Begriffe
Skalar λ: Eine Zahl aus diesem Körper, $\lambda \in K$
z.B. Masse, Temperatur, Energie...
Vektor x: Ein Pfeil mit einer gewissen Länge und Richtung.
z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Elekrisches Feld, Richtung & Betrag

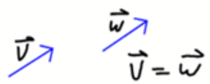
Aufbau der Vektoren
Vektoren sind bestehen jeweils aus Produkten der **Basisvektoren:**



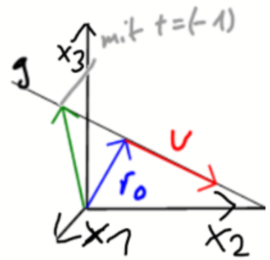
$\Rightarrow 3 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2$
b_1 & b_2 : Basisvektoren:
Sie könnten irgendwohin schauen



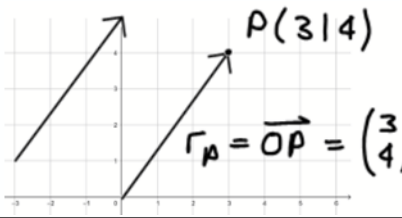
Vektoren haben keinen "festen" Ort:



Geradengleichung
$g : r_g = r_0 + t \cdot v$, $t \in R$
r_g=Ortsvektor zu beliebigen Punkt auf g
r_0=Stützvektor
v=Richtungsvektor



Ortsvektor
Zu jedem Punkt P = (x1|x2) existiert der Ortsvektor. Auch er hat eigenlich keinen "Ort", man mach den dennoch vom Ursprung aus



$r_P = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normierter Vektor / Einheitsvektor:
Ein Vektor $x \in K^n$ mit Norm 1, also $\|x\| = 1$.

Wird wie folgt gebildet:
mit $x \in K^n$ als beliebiger Vektor...

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot x$$

Verbindungsvektor
Vektor mit Richtung von "Punkt A=($x_1|x_2|x_3$) zu B=($y_1|y_2|y_3$)"

$$\overrightarrow{AB} = r_B - r_A = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$$

Öffnungswinkel (nur im R^n!)
Winkel zwischen Vektoren.
(Definition irrelevant (Cosinussatz))
Wichtig: $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle$ für K^n

Skalarprodukt: Mass für Winkel
Notationen: xy, $x \cdot y$ oder $\langle x, y \rangle$
(Definition irrelevant (Cosinussatz))

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \ldots + \overline{x_n} y_n$$

Wichtigste Regeln für (R^n)
$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
Wichtigste Regeln für (C^n)
$\langle c + w, z \rangle = \langle c, z \rangle + \langle w, z \rangle$ & $\langle c, w + z \rangle = \langle c, w \rangle + \langle c, z \rangle$
$\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$, komplex konjugiert!

Beziehung Norm ↔ Skalarprodukt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Norm eines Vektors
Norm = Mass für Länge

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

Für $x \in C^n$ sind Betragsstriche wichtig!
⇒ Betrag der komplexen Zahl nehmen!

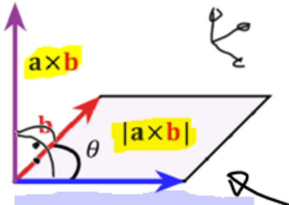
Betrag komplexer Zahl

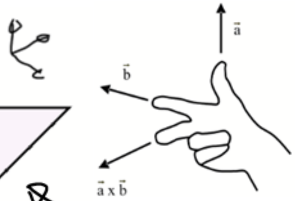
$$z = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2i \end{pmatrix} \quad |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$|2i| = |0 + 2i| \Rightarrow \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\|z\| = \sqrt{|1-i|^2 + |2i|^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Ist ein Vektor (nur im $\mathbb{R}^3$)
Mit $a \in \mathbb{R}^3$ & $b \in \mathbb{R}^3$
$n = a \times b \in \mathbb{R}^3$
Vektor $n \perp a$ & $n \perp b$

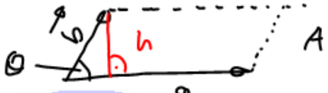




Norm von n ist:

$\|n\| = \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$

θ: Öffnungswinkel der Parallelogrammfläche



$A = \|a\| \cdot h \Rightarrow \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\varphi)$

Regeln:

$a \times b = -b \times a = -(b \times a)$

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$

$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$

Berechnen des Kreuzproduktes:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

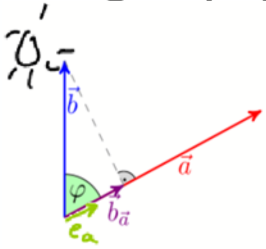
Einfacher geht es so:

$a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3$

...

...

Orthogonalprojektion



Skalarprodukt!

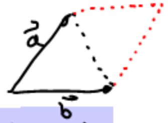
$$\frac{\cos(\varphi) \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\|}{\|a\|^2} \cdot a$$

$$\frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \cdot a$$

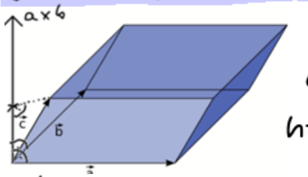
Anwendungen Vektorprodukt:

Bspw. Dreiecksfläche berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|,$$



Volumen eines Spats:



$V = G \cdot h$
$G = \|a \times b\|$
h = Orthogonalprojektion von c auf a×b

$\vec{h} = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|^2} a \times b \qquad \|\vec{h}\| = \frac{|\langle a \times b, c \rangle|}{\|a \times b\|}$

$\left(\|\vec{h}\| = \frac{|\langle a \times b, c \rangle|}{\|a \times b\|^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\|a \times b\|} \right)$

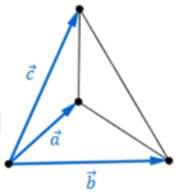
$\Rightarrow V = G \cdot h = \cancel{\|a \times b\|} \cdot \frac{|\langle a \times b, c \rangle|}{\cancel{\|a \times b\|}}$

$V = |\langle a \times b, c \rangle|$

Bspw. auch andere Körper:

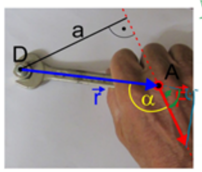
$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

$$V = \frac{1}{6} |\langle a \times b, c \rangle|$$



Das Drehmoment M einer Kraft F und Hebelarm r ist definiert durch

$$M = r \times F$$



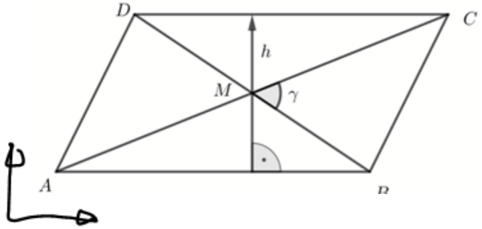
Richtung:
Annahme: $\vec{r}, \vec{F}$ in xy-Ebene
$\Rightarrow M = \vec{r} \times \vec{F}$ zeigt in z-Achse
$\Rightarrow$ Drehachse

Norm: $\|M\| = \|r\| \cdot \underbrace{\|F\| \cdot \sin(\theta)}_{\|F_\perp\|}$

(Anteil der Kraft senkrecht zum Hebel)

Beispiel:

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD mit Ecken A(4| − 3|3), B(1| − 3|0) und Diagonalenschnittpunkt M(3| − 2| 2.5).



Koordinate C & D?

Bei Koordinaten Ortsvektor zum Startpunkt nicht vergessen!

$$C = \vec{OM} + \vec{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

C(2|−1|2)

Gleich für

Gegeben sei der Punkt $P(4|5|6)$ und die Gerade g in Parameterdarstellung:

$$g:\ r_g = r_0 + t \cdot v = \begin{pmatrix} 17 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Welche Punkte auf der Geraden g haben den Abstand $d = 9$ zum Punkt P?

b) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die Gerade g. Berechnen Sie den entsprechenden Fusspunkt F.

a) Der gesuchte Punkt Q muss auf der Geraden g liegen, also (1 Punkt)

$$Q\left(17+3s \middle| 33+8s \middle| 10-s\right).$$

Der Abstand zwischen P und Q ist dann (1 Punkt)

$$d = \left\|\vec{PQ}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 13+3s \\ 28+8s \\ 4-s \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(13+3s)^2 + (28+8s)^2 + (4-s)^2} =$$

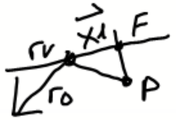
$$= \sqrt{969 + 518s + 74s^2}.$$

Damit $d = 9$ muss also

$$\sqrt{969+518s+74s^2} = 9$$
$$74s^2 + 518s + 969 = 81$$
$$\Rightarrow \quad s^2 + 7s + 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad s^2 + 7s + 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (s+3)(s+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -3,\ s_2 = -4$$

Wir erhalten die beiden Punkte $Q_1(8|9|13)$ und $Q_2(5|1|14)$ (1 Punkt).

b)



Orthogonalprojektion

$\Rightarrow x_1$

$\Rightarrow r_0 + \vec{x_1} = \vec{OF}$

Matrizen:

Rechteckiges Zahlenschema von Zahlen $a_{ij} \in K$ mit m Zeilen & n Spalten

$\Rightarrow A = (a_{ij})$: $i = 1 \dots m$ & $j = 1 \dots n$

Zeilen m zuerst

Spalten n später

$$m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n}\right.$$

Nullmatrix:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ n = Anz Spalten & Zeilen

Addition von Matrizen

$A + B$ nur definiert, wenn $A, B \in K^{m \times n}$ ⇒ Spalten & Zeilen Matrizen A & B gleich

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2×2

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 2×2

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Skalar • Matrize

$$\lambda \cdot A \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Matrix • Vektor

Spalte ↓ Zeile →

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$A \in K^{m \times n}$ $\quad 3 \cdot 3$ $\qquad x \in K^n$ $\quad 3$ $\qquad A \cdot x \in K^m$ $\quad 3(x1)$

⇒ Geht nur, wenn Anz. Spalten Matrix = Einträge im Vektor!

Matrix • Matrix

⇒ Geht nur, wenn Anz. Spalten links = Anz. Zeilen rechts!

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots \\ 2 & 4 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot4 & \dots \\ 0\cdot1+1\cdot2 & 0\cdot3+1\cdot4 & \dots \\ 1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot4 & \dots \end{pmatrix}$$

3×2 ✓ 2×2

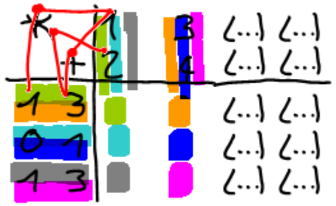
$m \times n$ $\quad m \times n$

$C(BA) = (CB)A$ ✓

$(C + B)A = CA + BA$

$C(B + A) = CB + CA$

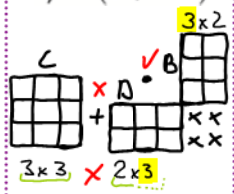
(i.A. $BA \neq AB$)



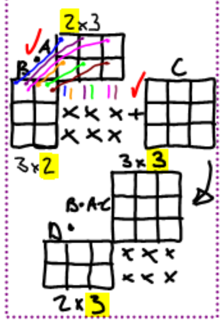
Rechnen für Retards

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

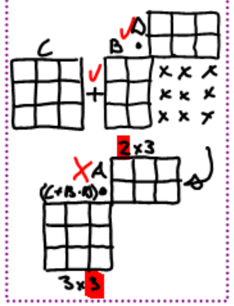
i) $A \cdot (C + D \cdot B)$



ii) $D \cdot (B \cdot A - C)$



iii) $(C + B \cdot D) \cdot A$



Lineare Gleichungssysteme in Matrize

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 3x_4 &= 0 \\ 1x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 8 \\ 3x_2 \qquad\quad + 7x_4 &= -2 \end{aligned}$$

LGS geben in Form von ⇒

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$A \cdot x = b$

⇒ x & b sind Vektoren

Lösen LGS mit Matrize:

In Zeilen-Stufenform bringen

- Zeilen dürfen vertauscht werden
- Zeile • λ wobei λ ≠ 0 ok
- Zeilen addieren subtrahieren ok

Lösungen, die es geben kann

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \boxed{*} & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

Punkt im $\mathbb{K}^2$.

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Lösung}$$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade im $\mathbb{K}^2$.

Beispiel Matrizen

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & ax_2 & - & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche a ∈ R hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung?

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -a & 1 \end{array} \xrightarrow{II-I} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2-a & -1 \\ 0 & a & -a & 1 \end{array} \xrightarrow{III+a\cdot II} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2-a & -1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2-a & -1 \\ 0 & 0 & a(1-a) & 1-a \end{array}$$

$\Rightarrow$ Kritisch: $a=0$, $a=1$

$a=0$: $L=\{\ \}$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 ↯ & 1 \end{array}$$

$a=1$ ∞ Lösungen

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_3 = t$
$-x_2 + t = -1$
$-x_2 = -1 - t$
$x_2 = 1 + t$
$x_1 + 1 + t + t = 1 \mid -1$
$x_1 + 2t = 0$
$x_1 = -2t$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ hat es genau 1 Lösung

b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 7, \\ 5x - y - 4z &= a + 7, \\ 2x + y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie heraus, für welche Werte von a das lineare Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung oder keine Lösung hat. Für den Fall von mindestens einer Lösung berechnen Sie diese Lösungsmenge.

b) Wir erstellen mit Hilfe des Gauss-Algorithmus die Zeilenstufenform des linearen Gleichungssytems (2 Punkte)

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & a+7 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & -14 & a-28 \\ 0 & 7 & -7 & -9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & -14 & a-28 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\frac{a}{2} \end{array}$$

Es erweist sich also, dass nur für

$$5 - \frac{a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems existiert (1 Punkt). Wir setzen also $a = 10$ und berechnen aus der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

die Lösungen $z = t \in \mathbb{R}$ und weiter

$$14y = -18 + 14t \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{9}{7} + t,$$
$$x = 7 - 2t + 3\left(-\frac{9}{7} + t\right) = \frac{22}{7} + t.$$

Wir erhalten als Lösung also eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch (1 Punkt)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 22 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kern einer Matrix

Def: Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ ist der Rang

$x = x_p + x_h$

partikuläre Lsg

homogene LsG

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \boxed{2} & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{x_p} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_h}, \; t \in \mathbb{R}$$

t

partikulärer Teil:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

Homogener Teil des LSG: Kern!

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \qquad t \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t

$> \ker(A) = \begin{pmatrix} t/2 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = t \quad x_1 = t/2$

Fall 1: $\text{rang}(A) = n$

- Rang: Anz. Pivots = Anz. Spalten
- Keine Spalte ohne Pivot-Element
- keine freie Variable
- genau 1 Lösung: $\vec{x} = 0$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & -3 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang 3

3 Spalten

Ges: $\ker(A) \Leftrightarrow$ Lösung von $Ax = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & 6 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$2 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$-5 \cdot x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$1 \cdot x_1 + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Fall 2: $\text{rang}(A) < n$

- Anz. Pivots r < Anz. Spalten n
- $n - r$ Spalten ohne Pivot-Element
- $n - r$ freie Variablen
- $\dim(\ker(A)) = n - r$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & 5 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow r = 2$ Pivots $\quad n - r \Rightarrow 3 - 2 = 1$

$n = 3$ Spalten $\quad \to 1$ freie Variable

t

$\Rightarrow \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$x_3 = t$

$x_2 + t = 0 \Rightarrow x_2 = -t$

$x_1 - 5t = 0 \Rightarrow x_1 = 5t$

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

Gerade, 1 dim

$$\underbrace{\dim(\ker(A))}_{n-r} + \underbrace{\text{rang}(A)}_{r} = \underbrace{n}_{=n}$$

$n - r$: Anz. freie Variabeln: Spalten ohne Pivots

r: Pivots

$= n$: Anz. Spalten

Rang einer Matrix

$r = \text{rang}(A)$

r = Anzahl Pivots

L-U-Zerlegung:

$A \cdot x = b$

$\Rightarrow L \cdot U \cdot x = b$

Regeln:

- Nur abziehen $\Rightarrow + \Rightarrow -(-x)$
- Nur von einer Zeie abziehen: $3 \cdot III - 2 \cdot II$ ✗ $\rightarrow$ $III - 2{,}7/5\, II$ ✓
- Permutationen notieren (unten)

~~x1~~	~~x2~~	~~x3~~	~~b~~
2	3	-5	~~-10~~
4	8	-3	~~-19~~
-6	1	4	~~-11~~

$-2 \cdot I$, $-(-3) \cdot I$:

$$\begin{matrix} \boxed{2} & 3 & -5 \\ 2 & \boxed{2} & 7 \\ -3 & 10 & -11 \end{matrix}$$

$-(5) \cdot II$:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & -46 \end{matrix}$$

$$U = \begin{matrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -46 \end{matrix} \qquad L = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Substitution

$A \cdot x = b$

$\Rightarrow L \cdot \boxed{U \cdot x} = b$

$\Rightarrow L \cdot \boxed{y} = b$

Vorwärtseinsetzen

$$\begin{array}{ccc|c} y1 & y2 & y3 & b \\ 1 & 0 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & -19 \\ -3 & 5 & 1 & -11 \end{array}$$

L

$y1 = -10$

$y2 = 1$

$y3 = -46$

$\Rightarrow U \cdot x = y$

Rückwärtseinsetzen

$$\begin{array}{ccc|c} x1 & x2 & x3 & y \\ 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}$$

U

$x1 = 2$

$x2 = -3$

$x3 = 1$

Permutationen in Permutationsmatrizen notieren!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P1$$

Bei mehreren Permutationen: $P_{tot} = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$

Danach wieder Vorwärts & Rückwärtseinsetzen

- Bestimmung einer *LU*-Zerlegung der Matrix *A*: $P \cdot A = L \cdot U$
- Vorwärtseinsetzen: $L \cdot y = P \cdot b \implies y$
- Rückwärtseinsetzen: $Ux = y \implies x$

Transponierte & Symmetrische Matrizen

Transponiert $(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

$A = a_{ji} \rightarrow A^T = a^T_{ij}$ Zeilen & Spalten vertauscht

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Regeln:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Symmetrien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- **symmetrisch**, falls $A^T = A$.
- **anti-symmetrisch**, falls $A^T = -A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrizen $(A \in \mathbb{C}^{m \times n} (\& \mathbb{R}^{m \times n}))$

$\Rightarrow$ Zeilen & Spalten vertauschen & komplex konjugieren

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
- $(A^*)^* = A$
- $(AB)^* = B^* A^*$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i \\ -1+i & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{-1+i} \\ \overline{2-3i} & \overline{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ 2+3i & -i \end{pmatrix}$$

Hermitesche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- **hermitesch** oder **selbstadjungiert**, falls $A^* = A$.
- **anti-hermitesch** oder **anti-selbstadjungiert**, falls $A^* = -A$.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2-3i \\ 2+3i & 2 \end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 3i & 2-i \\ -2-i & 5i \end{pmatrix}$$

meisten Matrizen sind weder noch!

Spur einer Matrix:

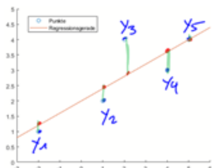
Nur für $n \times n$-Matrizen

Summe Diagonalen

$\Rightarrow tr(A) = 1 - 2 + 5 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Ausgleichsrechnung



Beispiel: ← aus Aufgabenstellung

Ziel: Gerade $mx + q$ durch Punktewolke

$(-2|1)\ (1|2)\ (2|4)\ (4|3)\ (5|4)$

Gleichung: $A^T \cdot A \, x^{neu} = A^T \cdot b$

① Lgs aufstellen

$-2m + q = 1$

$1m + q = 2$

$2m + q = 4$

$4m + q = 3$

$5m + q = 4$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

② $A^T \cdot A \cdot x$

Subst: C

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}}_{C}$$

③ $A^T \cdot b$

Subst.: y

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 40 \\ 14 \end{pmatrix}}_{y}$$

④ $C \cdot x = y$ berechnen

$m = 2/5$

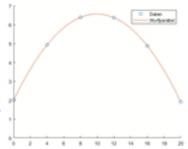
$q = 2$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{5}x + 2$

$$\begin{array}{cc|c} m & q & x \\ 50 & 10 & 40 \\ 10 & 5 & 14 \\ & C & y \end{array}$$

Geht auch für sowas:

x_i	0	4	8	12	16	20
y_i	2	4.93	6.39	6.37	4.88	1.91



① $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$2 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0$

$4{,}93 = a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16$

② $A \cdot x = b$ Aufstellen

③ & ④ ...

Determinante det(A) von Matrizen

u. A. für inverse Matrizen

Notation: det(A) oder |A|, nur für n×n!

Spaltenvektoren kann man „kürzen"

$3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $3\cdot 4\cdot (1\cdot(-1)-1\cdot 1) = -24$

Für 2x2-Matrizen

$$\det(A) = \det(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

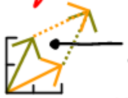
$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3\cdot(-4) - 3\cdot 4 = -24$

⇒ „Betrag Kreuzprodukt" ?

Determinante: „Fläche der Spaltenvektoren"

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $2\cdot 2 - 1\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

a_1 a_2



A = 3

Spaltenvektor a_1

Spaltenvektor a_2

⇒ „Vektorprodukt"

Determinante 3x3-Matrizen:

$$\det(A) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{Nur Notation}} = \det(a_1, a_2, a_3) := (a_1 \times a_2) \cdot a_3$$

<$a_1 \times a_2, a_3$>

„Spatprodukt"

a_1 a_2 a_3

a_1 Spaltenvektor a_1

a_2 Spaltenvektor a_2

a_3 Spaltenvektor a_3

Berechnung: Regel von Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$\det(A) = 0 + 0 - 6 - 18 - (-40) - 0$

oder $(0 + 0 - 6) - (18 + (-40) + 0) = 16$

Determinante n×n-Matrizen

Laplacescher Entwicklungssatz

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

① Zeile/Spalte mit möglichst vielen 0-en wählen

② Durchiterieren

$(-1)^{(\text{Zeile}\rightarrow + \text{Spalte}\downarrow \text{ der Kreise})}$

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+2)} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(3+2)} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix} + (-1)^{(4+2)} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix}$$

Sarrus = 1 | Sarrus = (−3) | = 0 | = 0

③ Zusammenzählen ⇒ $\det(A) = 1 + (-3) = \underline{\underline{-2}}$

Det n×n mittels L-U-Zerlegung:

- L-U-Zerlegung durchführen
- $\det(U)$ = Produkt der Diagonalelemente, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist.
- $\det(L)$ = Produkt der Diagonalelemente, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist.
- Bei Permutationen:

Bsp. $A = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow U = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & ½ & ½ \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $L = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ ½ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

A P A' P'

$\det(U) = 1$ $\det(L) = 1$

$\det(P) = \begin{cases} 1 & \text{Anzahl vertauschen: gerade} \\ -1 & \text{Anzahl vertauschen: ungerade} \end{cases}$ (oder Sarrus)

$\det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(U) \Rightarrow \det(A) = \dfrac{\det(L)\cdot\det(U)}{\det(P)}$

Achtung! Dafür nur 2 Zeilen auf Einmal vertauschen!

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Potenzieren von Matrizen & Determinanten

$\det(A^n) = (\det(A))^n$

Inverse eines n×n-Matrize:

Idee $A \cdot x = b \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$ Fragen Leitfaden!

Nur Möglich, wenn $\det(A) \neq 0$!

Gauss-Jordan-Algorithmus

Idee: $\boxed{A} \cdot \boxed{A^{-1}} = \boxed{\mathbb{1}}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1}?$$

① „Gauss auf beiden Seiten"

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A^{-1}} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

② Gauss von unten nach oben, sodass

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & A^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

Inverse 2×2-Matrizen

Nur 2×2!

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ A invertierbar, das heisst...

- # Spalten = # Pivots (nur dann geht Algorithmus)
- $n = \text{rang}(A)$
- A regulär ($n \times n$ & A^{-1} existiert, sonst singulär)
  LGS $A \cdot x = b$ hat 1 Lsg.
  $x = A^{-1} \cdot b$
- $\det(A) \neq 0$
- $\ker(A) = \{0\}$

$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}}$! nur hier kommutativ !

Rechnen mit Matrizen

Summen: Kommutativ
Produkte: Nicht kommutativ

Gleichungen: von gleichen Seiten:

$$(\ldots) = (\ldots) \mid \cdot A$$

$A \cdot (\ldots) = A \cdot (\ldots)$ oder

$(\ldots) \cdot A = (\ldots) \cdot A$

Bei Summen nicht relevant

X? $A \cdot X + B \cdot B^T = C \mid -(B \cdot B^T)$

$A \cdot X = C - (B \cdot B^T)$ oder

$A \cdot X = -(B \cdot B^T) + C \mid \cdot A^{-1}$

⇒ Summen kommutativ

$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1}(C - (B \cdot B^T))$

$\mathbb{1} \cdot x = A^{-1}(C - (B \cdot B^T))$

⇒ Produkte: Seite wichtig

$\underbrace{A \cdot x \cdot A^{-1}}_{\text{nicht zielführend}} = (C - B \cdot B^T) \cdot A^{-1}$

Geht auch, aber nicht zielführend