

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiele

$$(3x^2 - 2) = (\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{2})(\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2})$$

Wurzeln

$$\sqrt[n]{\text{Radikant}} = \text{Wurzel} \quad \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \sqrt{\frac{a+b}{c^2}} = \left| \frac{\sqrt{a+b}}{c} \right|$$

$$\sqrt{\frac{ab}{c^2}} = \left| \frac{\sqrt{ab}}{c} \right|$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2 b} = |a\sqrt{b}|$$

$$\sqrt{x+a} = b \Rightarrow \sqrt{x+a^2} = b^2 \Rightarrow x+a = b^2 \Rightarrow x = b^2 - a$$

Nenner rational machen → Bruch erweitern mit der Wurzel

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{8} \div \frac{\sqrt{2^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logarithmus

$$\log_{\text{Basis}}(\text{Numerus}) = \text{Logarithmus}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \quad \log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$$

$$\log_a(u/v) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u) \quad \ln(x) = \log_e(x)$$

$$\log_b(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)} \quad \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n)$$

$$\log_a(x) = n \Leftrightarrow x = a^n \quad \log_n(n) = 1$$

$$a \cdot \ln(m) - b \cdot \ln(n) = \ln\left(\frac{m^a}{n^b}\right) \quad a \cdot \ln(m) + b \cdot \ln(n) = \ln(m^a \cdot n^b)$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a(a^x) = \log_a(b) \Leftrightarrow x \cdot \log_a(a) = \log_a(b) \Leftrightarrow x = \log_a(b)$$

$$a^{\log_a(x)} = x \quad c \cdot \ln(x) = \ln(x^c)$$

Potenzen

$$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenz}$$

$$a^0 = 1 \quad -x^2 = -(x^2) = -x \cdot x \neq (-x)^2 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Gleiche Basis

Gleicher Exponent

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p+q) \cdot a^n$$

$$a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} \quad 25^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1}} = 5^3$$

Varia

$$ax^n \cdot bx^n = abx^{2n} \quad ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Bruchrechnung

$$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Quotient}$$

$$\frac{1}{x} \text{ Stammbruch} \quad \frac{2}{4} \text{ echter Bruch } z < n \quad \frac{4}{2} \text{ unechter Bruch } z \geq n$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd} \quad x \frac{a}{b} = \frac{xa}{b} = \frac{x}{1} \cdot \frac{a}{b} \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc} \quad \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{c}\right) = \frac{ac}{b} \quad \left(\frac{a}{c}\right) \left(\frac{c}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

Summenzeichen

$$\sum_{k=s}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=s}^n a_k$$

$$\sum_{k=s}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=s}^n a_k + \sum_{k=s}^n b_k$$

$$\left(\sum_{k=0}^n (a_k \cdot b_k)\right) \neq \left(\sum_{k=0}^n a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k\right) \quad \sum_{k=s}^n a_k = \sum_{k=s-z}^{n-z} a_{k+z}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n a_{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}$$

Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$\sin(a \cdot x) = a \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\sin^2(a \cdot x) = (a \cdot \sin(x) \cdot \cos(x))^2 = a^2 \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x))^2$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha) \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\cos(0)^2 = \cos(\pi)^2 = 1$$

$$\sin(0)^2 = \sin(\pi)^2 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

Intervalle

$$\text{Abgeschlossen} \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$\text{Offen} \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$\text{Halboffen} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$\text{Unendlich} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$$

Ableiten

Tangentensteigung/momentane Änderungsrate einer Funktionskurve an einer Stelle. Kann die Geschwindigkeit eines Körpers im Raum oder die Zuwachsrates einer Ökonomischen Grösse beschreiben.

Differentialquotient (Ableitung) an Stelle x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$(x^2)' = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

$f'(x)$ Beschreibt momentane Geschwindigkeit

$f''(x)$ Beschreibt momentane Beschleunigung

Elementare Funktionen

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\ln(ax))' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

$$(\ln(x)^a)' = \frac{a \ln(x)^{a-1}}{x}$$

$$\sin'(ax) = a \cdot \cos(ax)$$

$$\cos'(ax) = -a \cdot \sin(ax)$$

$$\ln(a + x^n)' = \frac{1}{a + x^n} \cdot (x^n)'$$

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{n \cdot x^{n-1}}{a + x^n}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{a \sqrt[n]{x^{a-1}}}$$

$$(\ln(a+x))' = \frac{1}{a+x}$$

$$\left(\frac{a}{(1-x)^b} \right)' = \frac{a \cdot b}{(1-x)^{b+1}}$$

$$(\ln(a-x))' = (\ln(x-a))' = -\frac{1}{a-x}$$

$$\left(\frac{a}{b^x} \right)' = (a \cdot b^{-x})' = -\frac{a \ln(b)}{b^x}$$

$$\ln(a-bx)' = -\frac{b}{a-bx}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt[n]{x}} \right)' = -\frac{a}{n} x^{-\frac{n+1}{n}} = -\frac{a}{n \sqrt[n]{x^{n+1}}}$$

$$\ln(ax-b)' = \frac{a}{ax-b}$$

$$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$$

$$\log_a(x)' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

$$\frac{d}{dt} \sin(\alpha t^2) = \frac{d}{dt} (\alpha t^2) \cdot \frac{d}{dt} \sin(\alpha t^2) = 2\alpha t \cos(\alpha t^2)$$

Höhere Ableitungen

Faktorregel (Konstante)

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x) \quad \left(\frac{x^n}{C} \right)' = \frac{(x^n)'}{C}$$

Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = (f_1'(x)f_2(x) \dots f_n(x)) + (f_1(x)f_2'(x) \dots f_n(x)) + \dots + (f_1(x)f_2(x) \dots f_n'(x))$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{C}{x^n} \right)' = -\frac{C \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} \quad \left(\frac{1}{v(x)} \right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Kettenregel

$$((f \circ g)(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$((f \circ g \circ h)(x))' = (f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiele

Kettenregel

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x^2+4x})' &= ((3x^2+4x)^{\frac{1}{2}})' \cdot (3x^2+4x)' \\ &= \frac{1}{2} (3x^2+4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x+4) = \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x}} = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sqrt{25+x^2}}{2} \right)' = \frac{((25+x^2)^{\frac{1}{2}})' \cdot (25+x^2)'}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{25+x^2}} \cdot 2x}{2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}}$$

Diverse

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(1-x)^5} \right)' &= ((1-x)^{-5})' \\ &= ((1-x)^{-5})' \cdot (1-x) = 5 \cdot (1-x)^{-6} = \frac{5}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a) \cdot a^x$$

$$(\ln(x)^3)' = \ln(x)' \cdot (\ln(x)^3)' = \frac{1}{x} \cdot 3 \ln(x)^2 = \frac{3 \ln(x)^2}{x}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos(x)} \right)' &= (\cos(x)^{-1})' = \cos(x)' \cdot (\cos(x)^{-1})' \\ &= -\sin(x) \cdot (-\cos(x)^{-2}) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion

Wenn eine Funktion eine bekannte Umkehrfunktion ist, kann zur Ableitung diese Formel verwendet werden:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Bsp.: Wir möchten $\sqrt{x}$ ableiten. Zugleich $(\sqrt{x})' = \frac{1}{((\sqrt{x})^2)'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von x^2 .

Polynomfunktionen

Mitternachtsformel

Zum lösen von **Quadratischen**-Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac \quad \text{Diskriminante}$$

Fallunterscheidung:

$D > 0$: Zwei verschiedene reelle Lösungen

$D = 0$: Eine (doppelte) reelle Lösung

$D < 0$: Keine reellen Lösungen

Biquadratische Gleichungen

Gleichung **4. Grades**, die **keine ungeraden Exponenten** enthält.

$$2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = z$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad a = 2, b = -3, c = 1 \text{ einsetzen}$$

$$z_1 = 0,5$$

$$z_2 = 1$$

$$\text{Resubstitution: } z_1 = x^2$$

$$\text{Resubstitution: } z_2 = x^2$$

$$x^2 = 0,5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{0,5}$$

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$x_1 = -\sqrt{0,5} \quad x_3 = -1$$

$$x_2 = \sqrt{0,5} \quad x_4 = 1$$

Integralrechnung

Integrieren / Auflösen = Umkehrung einer Ableitung

Stammfunktion / unbestimmtes Integral

Stammfunktion $F(x)$ = Funktion nach dem integrieren = Ursprungsfunktion $f(x)$
Die Stammfunktion $F(x)$ ist nicht eindeutig definiert. Durch Addition einer Konstanten können beliebig viele weitere Stammfunktionen erzeugt werden.

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ $\int f(x) dx$
heißt das unbestimmte Integral:

Bsp.: unbestimmtes Integral/Stammfunktion $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$
von x^3 ist $x^4/4$

Unbestimmtes Integrale

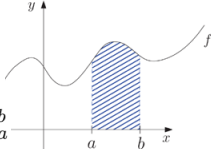
$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) & \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C \\ \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C & \int e^{\frac{x}{a}} dx &= a \cdot e^{\frac{x}{a}} + C & \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C \\ \int x \cdot e^{ax} dx &= \left(\frac{ax-1}{a^2} \right) \cdot e^{ax} & \int \tan(x) dx &= -\ln|\cos(x)| + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0) & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) + C \\ \int \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - x + C & \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arccos(x) + C \\ \int \log_a(x) dx &= \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0) & \int \frac{1}{ax} dx &= \frac{1}{a} \ln|x| + C \\ \int x^{\frac{3}{5}} dx &= \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + C \\ \int \frac{a}{x+c} dx &= a \cdot \ln(|x+c|) + C & \int \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{a}{b-x} dx &= -a \cdot \ln(|x-b|) + C & \int \frac{a}{x^n} dx &= -\frac{a}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C \\ \int \frac{a}{b-cx} dx &= -\frac{a}{c} \cdot \ln(|x-\frac{b}{c}|) + C & \int k dx &= kx + C \\ \int \sin(\omega t) dt &= -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + C & \int kx dx &= \frac{k}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int \sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7} \sqrt{x^7} \\ \int x^{\frac{8}{5}} dx &= \frac{5}{13} x^{\frac{13}{5}} + C \\ \int \sqrt{ax} dx &= \int \sqrt{a} \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} \quad \text{Bsp.: } \int \sqrt{4x} dx = \int 2\sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Bestimmtes Integral

Flächeninhalt unterhalb der Funktionskurve von $f(a)$ bis $f(b)$.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$


Beispiele

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

Rechenregeln

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Summenregel / Differenzregel

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Integrationsregeln

Partielle Integration (Produktregel)

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx & f(x) &\xrightarrow{\text{integrieren}} f'(x) \\ \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx & g(x) &\xrightarrow{\text{ableiten}} g'(x) \end{aligned}$$

Ziel: Nur noch ein Term im Integral

Bsp:

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \cdot x dx &= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 dx = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) dx \\ &= \sin(x) \cdot x - (-\cos(x)) + C = \sin(x) \cdot x + \cos(x) + C \end{aligned}$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx &= \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx \\ 2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx &= \sin^2(x) \\ \frac{1}{2} \cdot \sin^2(x) + C \end{aligned}$$

Substitution

Bsp, dx ersetzen:

$$\int_1^5 (4x+5)^{\frac{1}{2}} dx$$

Innere Funktion mit u ersetzen und dx bestimmen.

$$u = 4x + 5, \quad u' = \frac{du}{dx} = 4, \quad dx = \frac{1}{4} du$$

Grenzwerte in u einfügen und ersetzen (falls bestimmtes Integral).

$$\int_9^{25} \frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} = \frac{49}{3}$$

oder mit Rücksubstitution und unbestimmtes Integral bestimmen. u einfügen:

$$\frac{1}{6} (4x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

Bsp. Erweitern: Wichtig, x muss nach der Substitution verschwinden.

$$\begin{aligned} \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x dx & \quad u = 1+x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du \\ &= \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du \quad \text{erweitern um } x \text{ loszuwerden.} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Bsp. Faktoren ersetzen:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$u = \ln(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C \quad \text{du ist eine Konstante = 1}$$

Integral von der Form:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx & \quad u = f(x), \quad \frac{du}{dx} = f'(x), \quad du = f'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) dx \\ \frac{1}{f(x)} &= \ln'(f(x)) \rightarrow \int \ln'(f(x)) \cdot f'(x) dx \\ &= \int \ln'(u) du = \ln(u) + C = \ln(f(x)) + C \end{aligned}$$

Bsp:

$$\int \frac{2x}{x^2+16} dx = \int \frac{(x^2+16)'}{x^2+16} dx = \ln(|x^2+16|) + C$$

Bsp. (Substitution)

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

dx bestimmen:

$$u = \sqrt{x} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad dx = 2\sqrt{x} dy$$

x kürzen. **u kann jederzeit re-substituiert werden!**

$$= 2 \cdot \int \frac{\ln(u)}{u} \sqrt{x} dy = 2 \cdot \int \frac{\ln(u)}{\sqrt{x}} \sqrt{x} dy = 2 \cdot \int \ln(u) dy$$

Integrieren:

$$= 2 \cdot (u \cdot \ln(u) - u)$$

Partialbruchzerlegung

Integration von **rationalen Polynomfunktionen** $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

$$\int \frac{a}{(x-2)} dx = a \cdot \ln(|x-2|) + C$$

$$\int \frac{a}{(x-2)^n} dx = -a \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-2)^{n-1}} + C$$

Bsp:

Schritt 1: Faktorzerlegung

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} dx$$

Schritt 2: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{A(x^2-4x+4) + B(x^2-3x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-C}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)}{(x-1)(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-3B+C=1 \\ 4A+2B-C=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} A=2 \\ B=-2 \\ C=3 \end{matrix}$$

Schritt 3: Integrieren

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx \\ &= 2 \cdot \ln(|x-1|) - 2 \cdot \ln(|x-2|) - 3 \left(\frac{1}{2-1} \cdot \frac{1}{(x-2)} \right) + C \\ &= 2 \cdot \ln(|x-1|) - 2 \cdot \ln(|x-2|) - \frac{3}{x-2} + C \\ &= \ln \left(\frac{|x-1|^2}{|x-2|^2} \right) - \frac{3}{x-2} + C \end{aligned}$$

Bogenlänge

Länge einer der Funktionskurve im Intervall [a, b]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Volumen Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \begin{matrix} \text{Fläche Kreis: } \pi r^2 \\ r = f(x) = \text{Radius} \end{matrix}$$

Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \begin{matrix} \text{Bogenlänge: } 2\pi r \\ r = f(x) = \text{Radius} \end{matrix}$$

Schwerpunkt

$$x_S = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

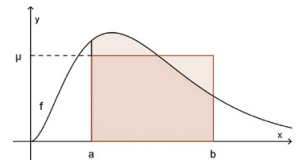
Flächeninhalt

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Mittelwert μ

Die Höhe des Rechteck, das
– die Grundlinie der Länge b – a hat und
– dessen Flächeninhalt der Fläche
unter der Kurve entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Grenzwertregel von Bernoulli-de l'Hospital

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls der neue Grenzwert immer noch von einer unbestimmten Form ist, muss man die Regel nochmals anwenden.

$$0 \cdot \infty \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{so dass } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

Die Regel nehmen, die einfacher abzuleiten ist.

$$\infty - \infty \quad f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \quad \text{so dass } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

Bsp:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x} = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) = \infty \cdot 0 \quad \text{einfacher}$$

BdH:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{0}{0} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)' = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)' \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-2}$$

Produktregel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-2}}{-\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}} = - \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-2} \cdot x^{\frac{4}{3}} = - \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Taylorreihen

Approximation von Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen.
Any analytic function can be approximated by its Taylor series expansion in some neighborhood of a point (Konvergenzradius). To compute a Taylor expansion of a function $f(x)$, you need to know its derivatives up to the desired degree at the point of expansion.

Bekannte Taylor-Reihen (Papula S. 186)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^4}{4!} - \frac{(x-x_0)^6}{6!} + \dots$$

Mit Entwicklungspunkt x_0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Taylorreihe von f

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \begin{array}{l} f^{(k)} = k\text{-te Ableitung} \\ x_0 = \text{Entwicklungspunkt} \end{array}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

Das Taylor-Polynom 1. Ordnung ist die Tangente an der Funktionskurve

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Glieder einer Taylorreihe bestimmen

Bsp. erste drei Glieder mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$$

1. Vorbereitung

$$f(x_0) = \frac{1}{(1-x_0)^5} = 1$$

$$f'(x_0) = \frac{5}{(1-x_0)^6} = 5$$

$$f''(x_0) = \frac{30}{(1-x)^7} = 30$$

2. Taylorreihe von f

$$\begin{aligned} T_f(x, 0) &= f(0) + f'(0)(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= 1 + 5(x-0)^1 + \frac{30}{2!}(x-0)^2 \\ &= 1 + 5x + 15x^2 \quad \text{Optional wenn } x_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Taylor-Polynom vom Grad 3 um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^x \cdot \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) \\ &= 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + x - \frac{x^3}{2!} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{2!3!} \quad \text{irrelevant weil Grad } > 3 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} = 1 + x + \frac{-3x^3 + x^3}{6} = 1 + x - \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) &\rightarrow \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \quad u = \sqrt{x} \\ &= 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} \end{aligned}$$

Fakultät

0!	1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!
1	1	2	6	24	120	720	5040	40'320	362'880

Konvergenzradius

Potenzreihe

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = t_f(x)$? Genau dann wenn:

- die Taylorreihe $t_f(x)$ eine konvergente Reihe ist, und
- die Werte der Funktion und der konvergenten Reihe übereinstimmen.

Polynom unendlichen Grades

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Potenzreihe mit Zentrum x_0

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

k kann bei Bedarf bei 1 beginnen.

Konvergenzradius ρ

Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $p(x)$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

- $|x - x_0| < \rho$ Reihe $p(x)$ konvergiert
- $|x - x_0| > \rho$ Reihe $p(x)$ divergiert

Konvergenzbereich

In welcher Bereich ein Taylorpolynom eine Funktion approximiert. Bsp:

$$t_{\ln(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad \begin{array}{l} \text{Konvergenzbereich} = x \in (0, 2) \\ \text{Konvergenzradius} = 1 \end{array}$$

$f(x) = \ln(x) \quad x_0 = 1$

$$t_{\sin(x)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x_0 = 0$$

Konvergenzbereich = Konvergenzradius = ∞
D.h. konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit genügend Glieder.

Bsp:

$$p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (x-x_0)^{k-1}$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \right| = 1$$

Verhalten Randpunkt bestimmen (weil $\rho \neq \infty$):

$$x = x_0 + 1 \quad p_1(1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \rightarrow \text{diverget}$$

$$x = x_0 - 1 \quad p_1(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 \pm \dots \rightarrow \text{diverget}$$

Somit:

$$p_1(x) \text{ konvergiert für } x \in (-1, 1)$$

Bsp:

$$p_1(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (x-x_0)^{k-1}$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^{k+1}}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{k+1}}{2^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |2^{k+1-k}| = 2$$

Verhalten Randpunkt bestimmen (weil $\rho \neq \infty$):

$$x = x_0 + 2 \quad p_2(2) = 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow \text{diverget}$$

$$x = x_0 - 2 \quad p_2(-2) = 1 - 1 + 1 \pm \dots \rightarrow \text{diverget}$$

Somit:

$$p_2(x) \text{ konvergiert für } x \in (-2, 2)$$

Varia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+2)}{4^n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 4 \cdot 1 = 4$$

Alternierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x - x_0)^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Uneigentliche Integrale

1. Art $\int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ($f(x)$ ist stetig)

2. Art $\int_a^b f(x) dx$ ($f(x)$ hat einen **Pol** im Intervall $[a, b]$)
(Nullstelle im Nenner)



Bsp 1. Art

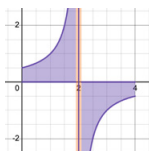
$$[a, \infty) \rightarrow [a, \lambda] \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_a^{\lambda} f(x) dx \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{2}$$

Bsp 2. Art

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} \frac{1}{2-x} dx + \int_{b+\epsilon}^c \frac{1}{2-x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)$$



Bsp: $\int_0^2 \frac{1}{2-x} dx$ Polstelle bei $x=2$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{1}{2-x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\ln(2-x) \Big|_0^{2-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(2-0) - \ln(2-(2-\epsilon))$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(2) - \ln(\epsilon) = \ln(2) - (-\infty) = \infty$$

Bsp: $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ Polstelle bei $x=1$

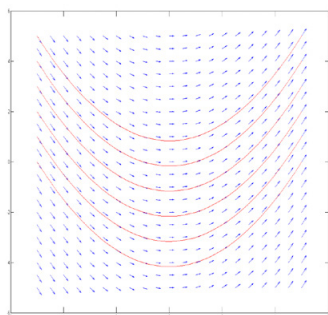
$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{1+\epsilon}^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{x-1} \Big|_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{x-1} \Big|_{1+\epsilon}^4$$

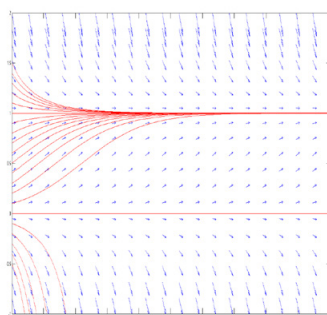
$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{(1-\epsilon)-1} - \frac{1}{-1} \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{(1+\epsilon)-1} \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{1} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3} - \frac{1}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon} - \frac{4}{3} = \infty$$



Unbestimmtes Integral



Autonome DGL

Differentialgleichung

Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Menge von Funktionen.

Klassifikation

Homogen

$$y' + f(x)y = 0 \quad g(x) = 0$$

$g(x)$ heisst Störfunktion. Separierbar.

Separierbar

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Wenn die DGL auf diese Form gebracht werden kann. Homogen.

Autonom

$$y' = h(y)$$

DGL hängt nur von y ab. Jede autonome DGL ist **separierbar** mit $g(x) = 1$. Das Richtungsfeld x -unabhängig.

Linear

$$a_n \cdot y^{(n)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$$

DGL mit konstanten Koeffizienten.

Bsp: $a_n(x) \cdot y^{(n)} + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = g(x)$ $y' + \frac{y}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$
 $a_n(x)$ und $g(x)$ sind **fest vorgegeben** Funktionen

Separation der Variablen

Verfahren zur Lösung einer **separierbaren / homogenen** ($g(x) = 0$)

Gleichung **1. Ordnung** (y'). Separierbar wenn $g(x) = 0$.

Homogene DGL

$$y' + f(x)y = 0 \quad \text{oder} \quad y' = f(x) \cdot h(y)$$

Verfahren: Allgemeine Lösung der homogenen DGL für $y(x)$

$$y' = \sqrt{x} \cdot y = y' - \sqrt{x} \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \cdot y \quad \frac{dy}{y} = \sqrt{x} \cdot dx \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \sqrt{x} dx$$

$$\ln(|y|) + c_1 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_2 \quad \ln(|y|) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad C = c_2 - c_1$$

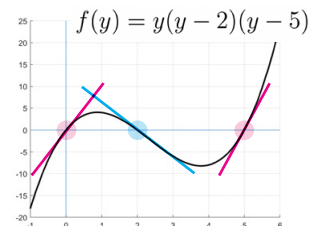
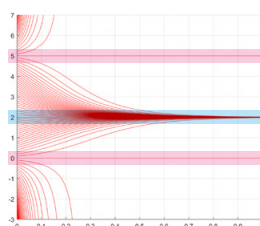
$$|y| = e^{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C} \quad |y| = e^C \cdot e^{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}} \quad y = \pm C \cdot e^{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}$$

→ Nächster Schritt: Anfangswertproblem

Konstante Lösungen (autonome DGL)

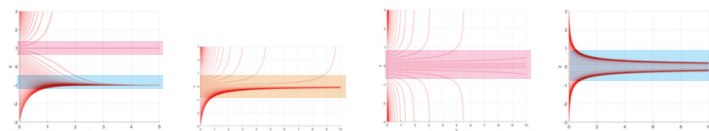
$$y' = y(y-2)(y-5)$$

Konstanten Lösungen: $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 5$.



Stabilität

Stabil, Semistabil, Instabil



Variation der Konstante

Verfahren zur Lösung einer **nicht separierbaren / inhomogenen** ($g(x) \neq 0$) Gleichung 1. Ordnung (y'). Lösung der homogenen Gleichung wird genutzt, um die inhomogene Gleichung zu lösen.

Allgemeine Lösung der homogenen DGL (durch Separation der Variablen). $F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$.

$$y_h = K \cdot e^{-F(x)} = K \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

Inhomogene DGL

$y(x)$ ist **unbekannt**, $f(x)$ und $g(x)$ (=Störfunktion) sind **bekannt**

$$y' + f(x)y = g(x) \quad g(x) \neq 0$$

Verfahren

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx$$

Aus der Inhomogenen DGL folgt:

$$K(x) = \int g(x) e^{F(x)} dx$$

Wir möchten $K(x)$ so wählen, dass die inhomogene DGL erfüllt wird.

Bsp:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^4}$$

1. Schritt: Die DGL in die Grundform $y' + f(x)y = g(x)$ bringen.

$$y' + \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot y = \frac{1}{x^4}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^4}$$

2. Schritt: Die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ bestimmen.

$$F(x) = \int f(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln(x)$$

3. Schritt: $e^{-F(x)}$ und $e^{F(x)}$ berechnen:

$$e^{-F(x)} = e^{-(-\ln(x))} = e^{\ln(x)} = x$$

$$e^{F(x)} = e^{-\ln(x)} = e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

4. Schritt: Allgemeine Lösung der DGL $y_h = K \cdot e^{-F(x)}$ bestimmen.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx \\ &= x \cdot \int \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \int \frac{1}{x^5} dx \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot x^{-4} + C\right) \end{aligned}$$

$$y(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^3} + C \cdot x$$

5. Schritt: Anfangsbedingung $y(1) = 0$ verwenden um C zu bestimmen.

$$y(1) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1^3} + C \cdot 1 \quad 0 = -\frac{1}{4} + C \quad C = \frac{1}{4}$$

6. Schritt: Spezifische Lösung / Konstante C in allgemeine Lösung einfügen.

$$y(x) = -\frac{1}{4x^3} + \frac{1}{4} \cdot x$$

Bsp. inhomogene DGL:

$$y' = x - y \quad y' + y = x$$

$$F(x) = \int 1 dx = x$$

$$e^{-F(x)} = e^{-x} \quad e^{F(x)} = e^x$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x} \cdot \int x \cdot e^x dx \\ &= e^{-x} \left(x \cdot e^x - \int e^x dx \right) \quad \text{Partielle Integration} \\ &= e^{-x} (x \cdot e^x - e^x + C) \end{aligned}$$

$$y(x) = x - 1 + e^{-x} \cdot C$$

Partikuläre Lösung

$$y' = f(x)y + g(x)$$

$$y_h = C \cdot e^{\int f(x) dx} = C \cdot e^{F(x)}$$

$$y_p = y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h} dx$$

$$y = y_h + y_p$$

Bsp:

$$y' = \frac{2}{x}y + x^3$$

1. Homogene Lösung

$$F(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \cdot \ln(|x|) = \ln(x^2)$$

$$y_h = C \cdot e^{\ln(x^2)} = C \cdot x^2$$

2. Partikuläre Lösung

$$y_p = x^2 \cdot \int \frac{x^3}{x^2} dx = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{Konstante können ignoriert werden.}$$

3. Allgemein Lösung

$$y = C \cdot x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

Anfangswertproblem (AWP)

Auflösen der Konstante C . Bsp:

$$y' = x - 4, \quad y(2) = 9$$

1. Allgemeine Lösung der DGL für $y(x)$

$$\begin{aligned} \int y'(x) dx &= \int x - 4 dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x + c_2 \\ y(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + C \quad C = c_2 - c_1 \end{aligned}$$

2. Nach Konstante C auflösen, so dass $y(2) = 9$

$$\begin{aligned} y(2) &= \frac{1}{2}2^2 - 4 \cdot 2 + C = -6 + C \\ 9 &= -6 + C \Rightarrow C = 15 \end{aligned}$$

DGL mit allgemeiner Lösung finden (homogen)

$$y' = f(x) \cdot y \quad f(x) = \frac{y'}{y}$$

Bsp:

$$y = C \cdot x^2$$

1. Ableiten

$$y' = C \cdot 2x$$

2. f(x) finden

$$C \cdot 2x = C \cdot x^2 \cdot f(x) \quad f(x) = \frac{C \cdot 2x}{C \cdot x^2} = \frac{2}{x}$$

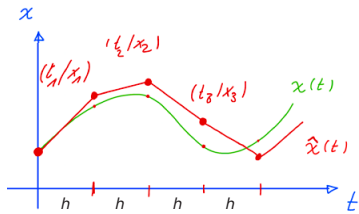
Somit:

$$y' = \frac{2}{x} \cdot y$$

Explizites Euler-Verfahren

(Auch Polygonzugmethode)

Numerisches Verfahren zur Approximation einer Differentialgleichung, wenn eine DGL **weder separierbar noch linear** ist.



$$\begin{cases} x' = f(t, x) & t_k = t_0 + k \cdot h & t\text{-Achse} \\ x(t_0) = x_0 & h = t_{k+1} - t_k & \text{Abstand} \end{cases}$$

Bsp:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{t + x(t)} & \text{Gesucht } x(1.2) \\ x(1) = 1 & h = 0.05 \end{cases}$$

4 Schritte:

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \\ t_1 &= 1.05 \\ t_2 &= 1.1 \\ t_3 &= 1.15 \\ t_4 &= 1.2 \end{aligned}$$

1. Identifikation der Funktion f(t, x)

$$f(t, x) = \sqrt{t + x}$$

2. Euler-Verfahren

$$x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \cdot f(t_0, x_0) \\ &= 1 + 0.05 \cdot f(1, 1) \\ &= 1 + 0.05 \cdot \sqrt{1 + 1} \approx 1.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h \cdot f(t_1, x_1) \\ &= 1.07 + 0.05 \cdot f(1.05, 1.07) \\ &= 1.07 + 0.05 \cdot \sqrt{1.05 + 1.07} \approx 1.1435 \end{aligned}$$

...

$$x_4 \approx 1.2954 \quad \text{Somit } x(1.2) \approx 1.2954$$

Nachtrag

Konvergenzradius

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{3^k \cdot k^2} \\ \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{3^k \cdot k^2}}{\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1} \cdot (k+1)^2}} \right| &= \left| \frac{(-1)^k \cdot 3^{k+1} (k+1)^2}{(-1)^{k+1} \cdot 3^k (k)^2} \right| \\ &= \left| (-1)^{k-(k+1)} \cdot 3^{k+1-k} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} \right| = \left| (-1) \cdot 3 \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 3 \frac{(k+1)^2}{k^2} = 3 \end{aligned}$$

Funktionen

