

Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^T \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}, \text{ mit } A(a_x; a_y) \text{ und } B(b_x; b_y)$$

o = Koordinatenursprung (0, 0).

Der **Ortsvektor** $\vec{OP}$ hat den Anfangspunkt bei Koordinatenursprung (0, 0).

$\vec{a} = \vec{b}$ wenn sie koordinatenweise übereinstimmen.

$a_n = b_n$, d.h. es gibt n Gleichungen: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

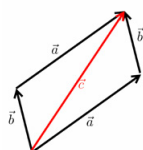
Und a_n und b_n müssen in $\mathbb{R}^n$ sein.

Nullvektor (= Neutralelement): $\vec{0} = PP$

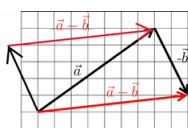
Addition, Subtraktion

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$



«von b nach a»

$$(-\vec{b}) + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$$

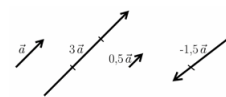
Gegenvektor: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Multiplikation

Skalarmultiplikation:

Ändert die Länge und/oder die Richtung (entgegengesetzt)

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$



Kollineare Vektoren (ansonsten Windschief)

Valider Ausdruck:

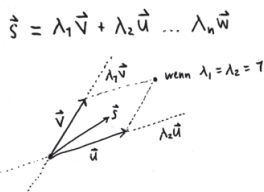
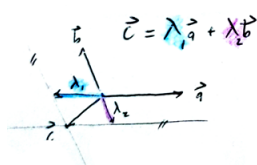
$$(\vec{a} \times (\vec{d} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{b}) + |\vec{b}| \cdot \vec{c}$$

Linearkombination

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + a_3 \vec{w}_3$$



Betrag / Länge (magnitude)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$\text{Vektor normieren: } \vec{e}_a = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Einheitsvektor: $|\vec{e}| = 1$

Kollinearität (lineare Abhängigkeit)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

– Wenn ein Vektor ein **Vielfaches** eines anderen Vektors ist.

D.h. beide Vektoren liegen **auf einer Linie**. $a = \lambda b$

– Im dreidimensionalen Raum können **höchstens drei Vektoren** voneinander linear abhängig sein.

– Alle kollinearen Vektoren liegen auf der **selben Ebene**.

– Der **Nullvektor** $\vec{0}$ ist zu jedem anderen Vektor kollinear.

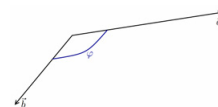
– Ist die **Determinante** gleich 0, sind die Vektoren linear abhängig.

Skalarprodukt (dot product)

Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren: $0^\circ \leq \phi \leq \pi (180^\circ)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2$$

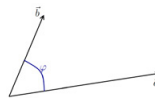
$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\varphi)$$



Rechenregeln

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \quad (\text{Gemischtes Assoziativgesetz})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{Distributivgesetz})$$



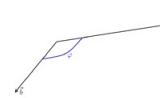
φ ist spitz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$



φ ist recht

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

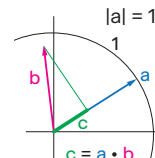
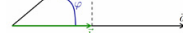


φ ist stumpf

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

Projektion

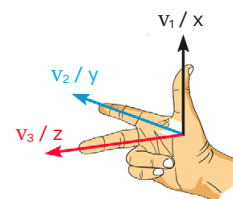
$$|\vec{a}| \neq 1 \quad \vec{b}_a = |\vec{b}_a| \vec{e}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \quad |\vec{b}_a| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$



Vektorprodukt (cross product)

Nur für 3-dimensionale ($\mathbb{R}^3$) Vektoren.

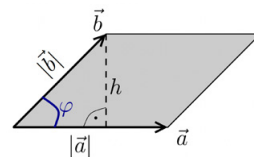
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{A} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow h = |\vec{b}| \sin(\varphi)$$

$$\mathcal{A} = |\vec{a}| h = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\varphi)$$



Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Reihenfolge! Nicht $\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$

Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Assoziativgesetz: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$.

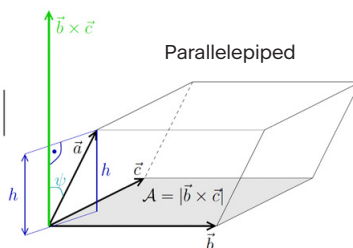
Spatprodukt

Nur für 3-dimensionale ($\mathbb{R}^3$) Vektoren.

Determinante für 3 x 3 Matrizen.

$$V = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Wenn **positiv**, dann handelt es sich um ein **Rechtssystem**.



Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + a_z b_x c_y + a_y b_z c_x - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z$$

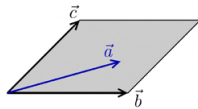
Komplanarität

Nur für 3-dimensionale ($\mathbb{R}^3$) Vektoren. Wenn drei Vektoren in einer **gemeinsamen Ebene** liegen. Sind drei Vektoren komplanar,

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$$

dann lässt sich der dritte Vektor durch eine **Linearkombination** darstellen:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



Matrizen

Zuerst **Zeile**↓, dann **Spalte**→

Multiplikation

$A \cdot B = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{ij} \cdot b_{ji}$ Resultat Matrix: Zeilen_A × Spalten_B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{2 \times 3} \quad B_{3 \times 2}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (Kein Kommutativgesetz)

Ausnahme: $n \times n$ Diagonalmatrizen sind kommutativ

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

$$ABX = C \Leftrightarrow X = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = B^{-1}A^{-1}C$$

$$AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$XAB = C \Leftrightarrow X = C(AB)^{-1} \Leftrightarrow X = CB^{-1}A^{-1}$$

$$AX - BX = (A - B)X$$

$$XB - 3X = 5A \Leftrightarrow X(B - 3I_n) \quad X(B - 3) \text{ ist ungültig}$$

$$AX = 2BX - C \Leftrightarrow AX - 2BX = -C \Leftrightarrow (A - 2B)X = -C \Leftrightarrow X = -(A - 2B)^{-1}C$$

$$(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2 \quad (kA)^2 = k^2A^2$$

$$A \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = A \text{ und } \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} A = A, \quad m \times n$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$MN + NQ \rightarrow N$ kann nicht ausgeklammert werden

Transponierte Matrix A^T

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

Für symmetrische Matrizen gilt: $A^T = A$

- $(A + B)^T = A^T + B^T$ für alle $m \times n$ Matrizen A und B .
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ für alle $m \times n$ Matrizen A und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $(AB)^T = B^T A^T$ für alle $m \times n$ Matrizen A und alle $n \times p$ Matrizen B .
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$ für alle invertierbare $n \times n$ Matrizen A .

$$\text{Bsp: } A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n \quad (2A^TB)^T = 2B^T(A^T)^T$$

Eigenschaften für $n \times n$ Matrizen

Untere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Spiegelsymmetrisch $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 8 & 5 \\ -10 & -1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Einheitsmatrix / Identität $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Inverse Matrix A^{-1}

Eine Inverse **existiert nur** wenn $\det(A) \neq 0$ und nur für **quadratische** Matrizen.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Für 2×2 -Matrizen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Für $n \times n$ -Matrizen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Auf erweiterte ZSF bringen}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -2 \\ -5 & -11 & -5 \\ -5 & -3 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 5 & 11 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

n Unbekannte benötigen mind. n Gleichungen.

Ein LGS ist **eindeutig lösbar** wenn die Determinante **ungleich 0** ist.

Nicht LGS

$$2x + x^2 = 1 \quad \sin(x) = 0,5 \quad \sqrt{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \quad e^{-4x} = 10$$

homogen

Wenn die rechten Seiten des Gleichungssystems Null sind.

Zeilenstufenform

Valide Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invalide Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reduzierte Zeilenstufenform

Valide Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invalid

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilen und mehrfache davon können zu anderen Zeilen addiert/subtrahiert werden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 1-a & -2 & a^2+5 \end{array} \right) \xrightarrow{-(a-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2+3a+2 \end{array} \right)$$

$$a^2-a-2 = (a+1)(a-2)$$

$$a^2+3a+2 = (a+1)(a+2)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid \vec{b})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Führende und freie Variablen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{führend} \\ \text{frei} \end{matrix}$$

Die Variablen x_2 und x_4 sind frei und können einen beliebigen Wert annehmen. Somit: $x_2 = s$ und $x_4 = t$.

Gleichungen aufgelöst (nach führende Variablen):

$$x_1 = 2 - 4x_2 - 7x_4 = 2 - 4s - 7t \quad x_3 = x_4 = t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4s - 7t \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

Gauss-Verfahren

Elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen von den i -ten und j -ten Zeilen,
- Multiplikation der i -ten Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar λ ,
- Addition eines λ -fachen der j -ten Zeile zu der i -ten Zeile.

$$\begin{cases} -y + 2z = 9, \\ 3x + 6y - 3z = 0, \\ 2x + 6y - z = 2. \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

In **erweiterte Koeffizientenmatrix** umschreiben und auf **Zeilenstufenform** bringen.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ y - 2z = -9, \\ z = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + z, \\ y = -9 + 2z, \\ z = 4. \end{cases}$$

Gauss-Jordan-Verfahren

Erweiterte Koeffizientenmatrix wird auf **reduzierte ZSF** gebracht.

Die Lösung $x = 6$, $y = -1$ und $z = 4$ kann nun direkt abgelesen werden.

$$\begin{cases} -y + 2z = 9, \\ 3x + 6y - 3z = 0, \\ 2x + 6y - z = 2. \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Umformungen

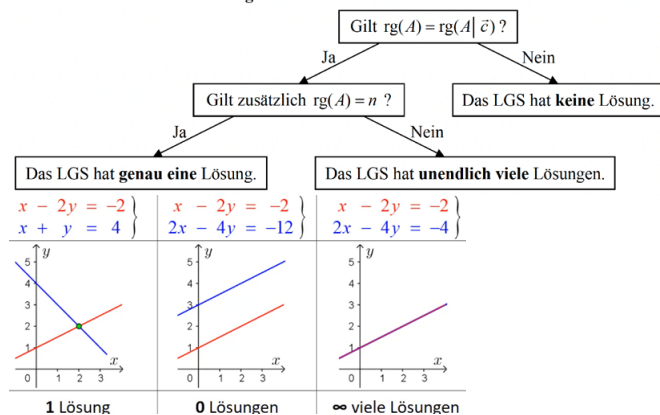
$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ 7 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit

$\text{rg}(A)$	Anzahl Nicht-Nullzeilen (führende Variablen) in Zeilenstufenform
$\text{rg}(A \vec{b})$	Anzahl Nicht-Nullzeilen in erweiterten Zeilenstufenform
n	Anzahl Variablen / Spalten
m	Anzahl Gleichungen / Zeilen

- lösbar:** $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{b})$
- genau eine Lösung:** $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{b}) = n$
 - unendlich viele Lös.:** $\text{rg}(A) < n$ (mehr Variablen als führende Einsen)
 - keine Lösung:** $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A | \vec{b})$

Kriterien für die Anzahl Lösungen eines LGS



Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$.
- Der Rang von A ist gleich n : $\text{rang}(A) = n$.
- Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat **genau eine Lösung** und sie lautet: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- Die Matrix A ist **invertierbar**.

Ein LGS kann **unlösbar** sein, **auch wenn es freie Variablen** besitzt, genau dann wenn der § kleiner als die Anzahl Gleichungen (Zeilen) ist und mindestens eine rechte Seite ungleich Null ist.

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen (Zeilen) und n Unbekannten (Spalten) ist **überbestimmt**, wenn: $m > n$. Es gibt mehr Bedingungen (Gleichungen) als Freiheitsgrade (Unbekannte). Es kann **keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben**.

Fallunterscheidung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 4-a^2 & 5+2a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 & a-2 \end{array} \right) \quad \text{Problem: Es kann nicht durch } 4-a^2 \text{ dividiert werden weil } 4-a^2 \text{ könnte 0 sein: } 4-a^2 = (2-a)(2+a)$$

- $a = -2$
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A | \vec{b}) = 3 \rightarrow \text{keine Lösung}$
- $a = 2$
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{b}) = 2 &\rightarrow \text{lösbar} \\ \text{rg}(A) = 2 < n = 3 &\rightarrow \text{unendlich viele Lösungen} \end{aligned}$
- $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5+2a}{4-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{4-a^2} \end{array} \right) \quad \begin{aligned} \text{Letzte Zeile kann durch } 4-a^2 \text{ dividiert werden.} \\ \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{b}) = n = 3 &\rightarrow \text{genau eine Lösung} \end{aligned}$

Determinante

Nur für $n \times n$ -Matrizen

Eine Matrix A ist **invertierbar (= nicht singular)** wenn: $\det(A) \neq 0$

Eigenschaften

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für eine $n \times n$ -Matrix
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$
- $\det(I_n) = 1$
- $\lambda \det(A) = \lambda(ad - bc) = \lambda ad - \lambda cb$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Wenn $\det(A) = 0$, dann ist eine Zeile oder Spalte eine **Linearkombination** der übrigen Zeilen/Spalten:

1. Alle Elemente einer Zeile/Spalte sind Null.

2. Zwei Zeilen/Spalten stimmen überein.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & 0 \\ 4 & 10 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -12 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Wert einer Determinante ändert sich **nicht**, wenn man zu einer Zeile (bzw. Spalte) ein beliebiges **Vielfaches einer anderen Zeile** (bzw. Spalte) elementweise addiert:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \quad \vec{a}_3) = \det(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$$

Bei einer Dreiecksmatrix ist die Determinante gleich dem **Produkt der Hauptdiagonalelemente**.

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 12 \cdot (-3) = -144$$

$$\det(A) = (-1)^z \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \quad \mathbf{z = \text{Anzahl Zeilentausch}}$$

Besitzen die Elemente einer Zeile/Spalte einer Determinante einen gemeinsamen Faktor λ , so darf dieser vor die Determinante gezogen werden:

$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2-reihige Determinanten berechnen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

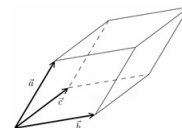
Geometrische Interpretation:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

3-reihige Determinante berechnen

$$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] \quad (\text{Spatprodukt / Regel von Sarrus})$$

Der Betrag der Determinante einer 3×3 Matrix A (Spatprodukt) ist gleich dem **Volumen** des Spats.



n-reihige Determinante

Vorzeichenfaktor wird nach der Schachbrettregel bestimmt

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

Bei jedem **Zeilen- oder Spaltenwechsel** ändert sich das **Vorzeichen** der Determinante.

Bsp:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{3. Zeile} - 4(2. \text{ Zeile})} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -15 & 3 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Entwicklung nach der 4. Spalte}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -15 & 3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -15 & 3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Zeile + 1. Zeile und

3. Zeile- 3(1. Zeile)

Entwicklung nach der 2. Spalte

$$= -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ -7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -21(7-6) = -21$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 12 \cdot \det(A_{22}) + \det(A_{24})$$

$$= 12 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Geraden

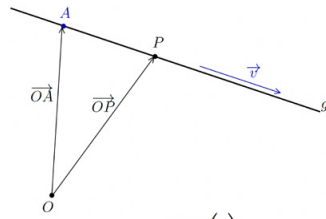
Parameterdarstellung

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{v}$$

$\vec{v}$ = Richtungsvektor

$\vec{OA}$ ist Ursprung der Geraden.

$\vec{OP}$ ein Punkt auf der Geraden.



Bsp. Parameterdarstellung durch den Punkt $A(1, 2, 4)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $P(x, y, z)$ sei ein beliebiger Punkt auf der Geraden g

$$P \in g \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OP OA v

Liegt ein Punkt auf der Gerade?

Bsp: Liegt der Punkt $Q(0, 0, 3)$ auf g ?

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ 4 + \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 0, \\ 2 + 2\lambda = 0, \\ 4 + \lambda = 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \lambda = -1, \\ \lambda = -1. \end{cases}$$

Ein Punkt liegt **nur** auf der Gerade wenn **alle** λ **übereinstimmen**.

Koordinatengleichung

$$\vec{n} \cdot \vec{OP} - \vec{n} \cdot \vec{OA} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

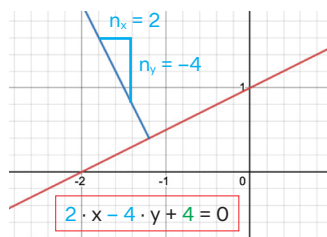
In Komponentenschreibweise:

$$n_x x + n_y y + c = 0 \quad \text{c} = -\vec{n} \cdot \vec{OA} = -(n_x a_x + n_y a_y)$$

Beischiebt eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Ursprung c .

$$n_x x + n_y y + n_z z + c = 0$$

Beischiebt eine Ebene mit Ursprung c .



$$x\text{-intercept} = -\frac{c}{n_y}$$

$$y\text{-intercept} = -\frac{c}{n_x}$$

Bsp. Koordinatengleichung der Geraden g durch den Punkt $A(4, 6)$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $P(-1, -9)$ auf g ?

$$c = -(3 \cdot 4 + (-1) \cdot 6) = -6$$

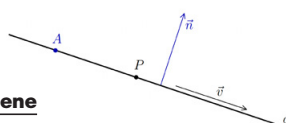
$$3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-9) + (-6) = 0 \Rightarrow \text{Der Punkt P liegt auf } g$$

Normalenvektor

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{n}$ stehen **orthogonal (senkrecht)** $\perp$ zueinander wenn:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$$



Schnittpunkt Gerade und Ebene

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E: x - 2y - 3z - 22 = 0$$

g in E einsetzen:

$$(1 + \lambda) - 2(-1 - 2\lambda) - 3(3 - 3\lambda) - 22 = 0$$

$$\Rightarrow (-28) + 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$S = g(2) = (3, -5, -3)$$

Schnittpunkt

$$\vec{OA}_1 + \lambda \vec{v}_1 = \vec{OA}_2 + \mu \vec{v}_2 \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 - \mu \vec{v}_2 = \vec{OA}_2 - \vec{OA}_1$$

Gleichungssystem mit 2 Unbekannten λ und μ . Lösung für Schnittpunkt S :

$$\vec{OS} = \vec{OA}_1 + \lambda \vec{v}_1 = \vec{OA}_2 + \mu \vec{v}_2$$

Bsp:

$$\begin{aligned} g_1: \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad g_2: \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 5\lambda + 10\mu = -10 \\ -\lambda + 2\mu = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \lambda = -3 \quad \mu = \frac{1}{2}$$

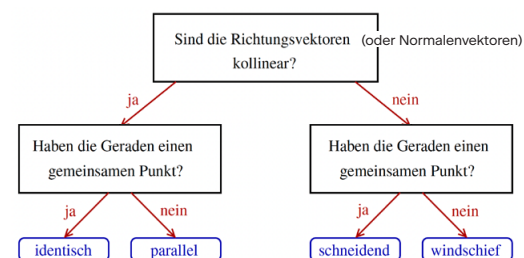
$$S: \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad S: \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_1: 3x + y - 8 = 0 \quad g_2: 6x - 2y - 3 = 0$$

$$\begin{cases} 3x + y = 8, \\ 6x - 2y = 3 \end{cases} \quad x = \frac{19}{12} \quad y = \frac{13}{4} \quad \text{Schnittpunkt} \left(\frac{19}{12}, \frac{13}{4} \right)$$

$$g_1: 6x + y - 9 = 0 \quad g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt S_v ist wenn $\lambda = 0$ gehört, also: $S(1; 3)$



kollinear $\rightarrow$ identisch oder parallel?

$$g_1: \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 10\mu \\ 5 - 2\mu \\ -12 + 6\mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 = 10 + 10\mu \\ 1 = 5 - 2\mu \\ -6 = -12 + 6\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Parallel weil μ nicht übereinstimmt.

nicht kollinear $\rightarrow$ schneidend oder windschief?

Schneidend genau dann wenn $[\vec{A_1A_2} \quad \vec{v_1} \quad \vec{v_2}] = 0$

oder $(\vec{v_1} - \vec{v_2} \mid \vec{A_1A_2})$ hat eine eindeutige Lösung.

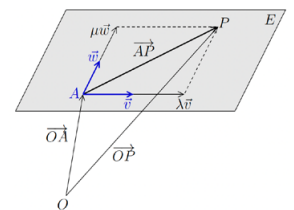
Ebenen

Parameterdarstellung

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$$

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind Richtungsvektoren.

Die Parameterdarstellung der Ebene ist nicht eindeutig: Der Punkt A kann in der Ebene beliebig gewählt werden.



Bsp: Die Ebene E verläuft durch den Punkt $A = (3; 5; 1)$.

Liegt der Punkt $Q(15, 12, 8)$ auf der Ebene?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda + 5\mu \\ 5 + 5\lambda + \mu \\ 1 + \lambda + 3\mu \end{pmatrix} \quad \text{Richtungsvektoren sind } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gauss-Verfahren um nach λ und μ aufzulösen.

Koordinatengleichung

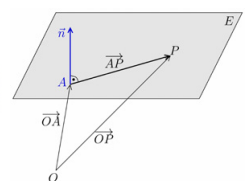
$$\vec{n} \cdot \vec{OP} - \vec{n} \cdot \vec{OA} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

In Komponentenschreibweise:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{OA} = -(a a_x + b a_y + c a_z) \quad P = (x; y; z) \quad d \text{ ist Ursprung der Ebene}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Schnittgerade

Nur wenn die **Richtungs-/Normalenvektoren nicht kollinear** sind.

$$E_1: 5x + 2y + 3z = 0 \text{ und } E_2: 10x + 7y - 12z - 45 = 0$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 0 \\ 10x + 7y - 12z = 45 \end{cases}$$

Jede Gleichung beschreibt eine Ebene. Lösung Schnittgerade:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 3\lambda \\ 15 + 6\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

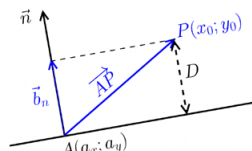
Schnittwinkel

$$\varphi = \arccos \left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) \quad \text{wobei } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ Normalenvektoren sind.}$$

Abstände von einem Punkt zu einer Geraden

In der Ebene

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Im Raum

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|} \quad g: \vec{OA} + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkte auf einer Geraden g zu einem Punkte A mit Abstand D = 3

$$A = (1; -2; 3)$$

$$g: \vec{OS} = \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda \\ -8 + 4\lambda \\ 3 + \lambda \end{pmatrix} \quad |\vec{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda - 1 \\ -8 + 4\lambda + 2 \\ 3 + \lambda - 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 - 3\lambda \\ -6 + 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$\sqrt{(5 - 3\lambda)^2 + (-6 + 4\lambda)^2 + \lambda^2} = 3$$

$$25 - 30\lambda + 9\lambda^2 + 36 - 48\lambda + 16\lambda^2 + \lambda^2 = 9$$

$$26\lambda^2 - 78\lambda + 52 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = 2 \quad \text{Somit gibt es zwei Punkte.}$$

Abstände von einem Punkt zu einer Ebene (im Raum)

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bedeutung von d:

Ist die Koordinatengleichung normiert, dann entspricht |d| dem Abstand der Ebene E vom Ursprung

$$\frac{\text{Abstand vom Ursprung}}{|\vec{n}|} = \frac{|d|}{|\vec{n}|}$$

kollinear → parallel oder identisch?

Wenn die Ebenen die selben **Richtungs-/Normalenvektoren** haben. Richtungsvektoren paralleler Ebenen sind **koplanar**.

Bsp.

$$E_1: 6x - 4y + 5z + 1 = 0 \quad E_2: -6x + 4y - 5z - 9 = 0$$

Irgend ein Punkt testen, z.B. P(0, 0, 0)

$$6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 1 \neq -6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 9 \rightarrow \text{parallel, sonst identisch}$$

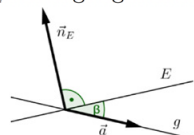
Richtungsvektor

Gegeben ist E: $4x - y - 3z + 1 = 0$. Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von E?

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{Folglich sind } \vec{a} \text{ und } \vec{n} \text{ nicht orthogonal zueinander, und somit ist } \vec{a} \text{ kein Richtungsvektor von E.}$$

Neigungswinkel

β : Neigungswinkel von g gegenüber E ($0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$).



$$\beta = \arccos \left(\frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}_E| |\vec{a}|} \right) - 90^\circ$$

Fusspunkt

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \frac{D}{|\vec{n}|} \vec{n} \quad \text{oder} \quad \vec{OB} = \vec{OA} - \frac{D}{|\vec{n}|} \vec{n}$$

so dass $ax + by + cz + d = 0$

Parametergleichung → Koordinatengleichung

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1. Normalenvektor bestimmen: $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. d bestimmen:

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{OA} = -(2 \cdot 5 + (-8) \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 6$$

3. Koordinatengleichung aufstellen

$$2x - 8y + z + 6 = 0$$

Koordinatengleichung → Parametergleichung

$$x - 2y + 3z - 8 = 0.$$

1. Irgendeinen Punkt finden, der diese Gleichung erfüllt.

$$\text{z.B. } x = 0, y = -4 \text{ und } z = 0 \quad A = (0, -4, 0)$$

2. Normalenvektor definieren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bestimmen. Es muss gelten:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

Zudem dürfen $\vec{w}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear sein (ein Vielfaches voneinander).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x - 2v_y + 3v_z = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = w_x - 2w_y + 3w_z = 0.$$

Jeweils zwei Komponenten der Vektoren festlegen (irgendeinen Wert) und die dritte berechnen, damit die Gleichung erfüllt wird:

Für $v_x = 1$ und $v_y = 0$ ergibt sich

$$1 + 3v_z = 0 \Leftrightarrow v_z = -\frac{1}{3}.$$

Analog erhält man für $w_x = 0$ und $w_y = 1$ die dritte Komponente

$$-2 + 3w_z = 0 \Leftrightarrow w_z = \frac{2}{3}$$

4. Parameterdarstellung aufstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Bsp: $g: 7x - 2y + 3 = 0$

1. Irgendeinen Punkt finden, der diese Gleichung erfüllt.

$$7 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) + 3 = 0 \quad A = (-1; -2)$$

2. Normalenvektor definieren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Richtungsvektoren $\vec{v}$ bestimmen
Kann direkt von $\vec{n}$ abgelesen werden.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. Parameterdarstellung aufstellen:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit

linear abhängig = kollinear (in $\mathbb{R}^2$) / komplanar (in $\mathbb{R}^3$)

Für n Vektoren: **linear unabhängig** wenn $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$.

linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

mit $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Nur der **Nullvektor** ist **linear abhängig**: $\lambda \vec{0} = \vec{0}$

Jeder andere Vektor $\vec{a}$ ist linear unabhängig.

Drei Vektoren im Raum sind genau dann **linear abhängig**, wenn sie **komplanar** sind. $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$
 $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ mit $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$

Bsp: Sind die folgenden Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig?
Ja, wenn das LGS keine freien Variablen hat.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

Vektorräume

Vektoren in einem Vektorraum können nebst üblichen Vektoren auch **Polynome** oder reelle **Funktionen** sein.

$\mathbb{P}_n$ Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$

$\mathbb{R}^{m \times n}$ Der Vektorraum der reellen $m \times n$ -Matrizen

$\mathbb{R}^n$ Der Vektorraum der Vektoren mit n reellen Komponenten

Rechengesetze

- Kommutativität $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativität $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Existenz des Neutralelement $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Zahl 1 ist das Neutralelement der skalaren Multiplikation $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
 Falsch: $\vec{1}$, für den gilt: $\vec{a} \cdot \vec{1} = \vec{a}$

Unterraumkriterium

1. Nullvektor $\vec{0}$ ist Neutralelement und im Vektorraum und ist per Definition linear abhängig. Falls $\vec{0} \notin U$, dann ist U **kein** Unterraum.

2. Addition: $\vec{a} + \vec{b} \in U$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U$

3. Skalare Multiplikation: $\lambda \vec{a} \in U$, $\forall \vec{a} \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Für die Definition eines Vektorraums spielt nur die Multiplikation mit einem Skalar (einer reellen Zahl) eine Rolle; das Skalarprodukt kommt nicht vor

Bsp:

- Jede Gerade oder Ebene, muss **durch den Ursprung** gehen.
- $\{\vec{0}\}$ ist ein Unterraum von jedem Vektorraum V .
- $\mathbb{P}_2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_4$

Untervektorraum

Homogen = geht durch Ursprung = ist Unterraum

Bsp:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$ Das LGS hat keine freien Variablen und hat genau eine Lösung und beschreibt einen **Punkt** am Ursprung $(0, 0, 0)$ und ist ein **Unterraum von $\mathbb{R}^3$** .

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$ Beschreibt einen Punkt **nicht am Ursprung** und ist deshalb **kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ = inhomogen**

$\begin{matrix} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{Lösungsmenge} & \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Beschreibt eine **durch den Ursprung** verlaufende Ebene.

Ist ein **Unterraum** vom $\mathbb{R}^3$, weil das LGS **homogen** ist.

Polynome

$\mathbb{P}_2$ ist Polynom vom Grad ≤ 2

$\mathcal{P}_2$ ist Polynom vom Grad $= 2$

Für $\mathbb{P}_n[x]$: **Monombasis** $\mathcal{M} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Jedes Polynom kann als eine Linearkombination von Polynomen dargestellt werden. Bsp:

$V = \mathbb{P}_2$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 3 - x^2$, $p_3(x) = 2x + 4x^2$

$\text{Lin}(p_1, p_2, p_3) = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid p(x) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

Ist $p(x) = 4 + x^2 \in \text{Lin}(p_1, p_2, p_3)$? $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ finden.

$$4 + x^2 = \lambda_1 \cdot (1 + x) + \lambda_2 \cdot (3 - x^2) + \lambda_3 \cdot (2x + 4x^2)$$

$$= (\lambda_1 + 3\lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_3) \cdot x + (-\lambda_2 + 4\lambda_3) \cdot x^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 4\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Hat das LGS eine Lösung, somit $p(x) \in \text{Lin}(p_1, p_2, p_3)$

Koordinatenvektor

Koeffizienten der **Basisvektoren** von einem Vektor $\vec{v}$ in V .

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n, \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

$\vec{v}_B$ ist Koordinatenvektor (Komponentendarstellung) von $\vec{v}$ bezüglich Basis B .

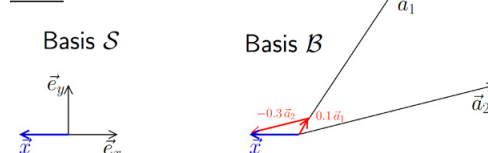
Koordinatenvektor eines Polynoms

$p(x) = -9 + 3x + x^2$ Basis $B = (1, 1 + 2x, x + x^2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \vec{p}_B = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

$\rightarrow$ Weitere Beispiele siehe Seite 8.

Basis



Erzeugendensystem bei dem alle Vektoren **linear unabhängig** sind, d.h. $\det(A) \neq 0$. **Richtungsvektoren** sind eine Basis der Ebene / Gerade.

Eine Basis des Vektorraums V hat folgende **Bedingungen**:

- Die Basis besteht aus Vektoren, die alle im Vektorraum V liegen.
- Jeder Vektor in V kann eindeutig als **Linearkombination der Basisvektoren** dargestellt werden $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$
 $\text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$, d.h. jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich als **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ darstellen:
- Die **Basisvektoren sind linear unabhängig**, d.h. es gibt keine Linearkombination der Basisvektoren, die gleich Null ergibt (ausser der trivialen Linearkombination, bei der alle Koeffizienten gleich Null sind).

Standardbasis für $\mathbb{R}^3$ ist $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \text{Einheitsmatrix}$

Die Basis eines Vektorraumes ist nicht eindeutig, d.h. es gibt **unendlich verschiedene Basen** in einem **Vektorraum**, bzw. die Basisvektoren können wiederum aus anderen Vektoren erstellt werden.

Zeigen, dass eine Basis in $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = 3$$

Erzeugendensystem

linear abhängige oder unabhängige Vektoren, die einen Vektorraum aufspannen. **Basisvektoren** oder **Standardbasis** ein Erzeugendensystem.

Bsp: **Mind. drei linear unabhängige** Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind ein Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^3$ und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Lineare Hülle (Erzeugnis, Spann)

$\text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n, \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

$\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n = \text{Erzeugendensystem}$, bilden einen **Unterraum** von V .
D.h. $\vec{x}$ sind alle Vektoren, die aus einer Lin.komb. der Vektoren $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ erstellen werden können.

Unterschied Basis und Erzeugendensystem

Basisvektoren müssen **linear unabhängig** sein, Vektoren eines **Erzeugendensystem** können **linear abhängig** sein.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Standardbasis}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Basisvektoren}$$

Dimension

Anzahl Basisvektoren/-Matrizen eines Vektorraums.

$\dim(V) = n$, für Basisvektoren $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}^{n \times n}) = n \cdot n$, $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$

Der Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$ hat die Dimension Null.

Wir betrachten die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ sowie die $n \times n$ Matrix A , die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ nebeneinander schreiben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- $\text{rg}(A) = n$
- $\det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar.
- Das lineare Gleichungssystem $A \vec{x} = \vec{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

Ist U ein Unterraum?

$$U_0 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Bedingung}$$

1. Ist das Neutralelement in U?

Ja, wenn $a = 0$ und $b = 0$, denn $0 \in \mathbb{R}$

2. Addition $\vec{a} + \vec{b} \in U$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Somit $A_1 + A_2 \in U_0$ für alle $A_1, A_2 \in U_0$. Die erste Bedingung ist erfüllt.

3. Skalare Multiplikation $\lambda \vec{a} \in U$

$$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Somit $\lambda A_1 \in U_0$ für alle $A_1 \in U_0$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die zweite Bedingung ist erfüllt.

Sind die Polynome linear unabhängig?

$$p_1(x) = 5, \quad p_2(x) = 1 - 4x, \quad p_3(x) = 3 + 8x, \quad p_4(x) = x + 7x^2$$

$$\text{LGS: } \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) = 0$$

$$\begin{matrix} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

→ freie Variable, linear abhängig

Basiswechsel der Abbildungsmatrix

Bsp, wir wollen den Vektor $\vec{v}$ in der Basis B in der Basis S ausdrücken:
Gesucht ist der Koordinatenvektor $\vec{v}_S$.

$$b_1 \cdot \vec{b}_1 + b_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}, \quad B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}, \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B$$

$$s_1 \cdot \vec{s}_1 + s_2 \cdot \vec{s}_2 = \vec{v}, \quad S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}, \quad \vec{v}_S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_S$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_B$$

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_S = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}_S$$

Komponentenvektor bei Basiswechsel bestimmen

$${}_S T_B = {}_S \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}_B = \text{Basiswechsel von } B \text{ nach Standardbasis } S.$$

1. Basistransformationsmatrix berechnen:

Sind die Zielbasisvektoren nicht die Standardbasisvektoren S
→ Gleichungssystem:

$$\left(\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 \mid \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \right) \Rightarrow \left(\vec{b}_1 \mid {}_c T_B \right)$$

Neue Basis | Alte Basis

Bsp:

$$\left(\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 \mid \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array} \right)$$

$${}_c T_B = ({}_c (\vec{b}_1)_c \quad ({}_c (\vec{b}_2)_c))_B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_B$$

2. Komponentendarstellung $\vec{v}_c$ berechnen:

$$\vec{v}_c = {}_c T_B \vec{v}_B$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Somit:

$$\vec{v} = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \quad \vec{v} \text{ dargestellt bzgl. Basis } B$$

$$\vec{v} = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 \quad \vec{v} \text{ dargestellt bzgl. Basis } S$$

Zusammenhang zwischen Abbildungsmatrix ${}_B A_B$ und ${}_c A_c$

$${}_c A_c = {}_c T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_c = {}_c T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_c T_B^{-1}$$

$$({}_B T_c)^{-1} = {}_c T_B$$

Bsp, gesucht ist die Abbildungsmatrix ${}_S A_S$ von f bzgl. der Standardbasis.

Gegeben Basis B $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$
und die Abbildungsmatrix bzgl. Basis B ${}_B A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B$

$${}_S A_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_S T_B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_S$$

(Koordinatenvektor)

Einen Vektor in Basis B in der Standardbasis ausdrücken

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_S \right)$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_B \quad \vec{c} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \vec{c}_S$$

Somit:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}_S = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S - 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S$$

Einen Vektor in der Standardbasis in der Basis B ausdrücken

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}_S \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}_S \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 11 \\ 2\lambda - 4\mu = 2 \end{cases}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 2 & -4 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \vec{a}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

Einen Vektor in Basis B in Basis C ausdrücken

$B \rightarrow \text{Standardbasis} \rightarrow C$

Space Transformation

Local to World

<https://youtu.be/XiwEyopOMqg?t=3206>

World to Local:

<https://youtu.be/XiwEyopOMqg?t=4723>

Lineare Abbildungen

Linearität prüfen

Entweder können **Bedingungen 1** und **2** überprüft werden oder direkt 3.

- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(\lambda \vec{x}_1) = \lambda f(\vec{x}_1)$
- $f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2)$

$$f(\vec{a}) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2)$$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2$$

Oder **nicht linear** wenn:

$$f(\vec{0}) \neq \vec{0}$$

Bsp. nicht linear:

$$\begin{pmatrix} z^2 - x \\ \frac{1}{10}y - z + 3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ x - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Bsp: } f(M) = M^T$$

f ist linear, denn es gilt:

$$f(A_1 + A_2) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$$
$$= f(A_1) + f(A_2) \text{ für alle } A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\text{und } f(\lambda A) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda f(A) \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bsp:

$$f: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}, \quad p(x) \mapsto f(p(x)) = x p(x)$$

f ist linear, denn es gilt:

$$f(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x)) = x p_1(x) + x p_2(x) = f(p_1(x)) + f(p_2(x))$$

für alle $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{P}_n$

$$\text{und } f(\lambda p(x)) = x(\lambda p(x)) = \lambda(x p(x)) = \lambda f(p(x)) \text{ für alle } p(x) \in \mathbb{P}_n \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

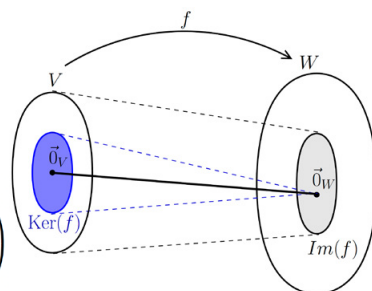
Für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gilt:

$$- f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

- Der Nullvektor $\vec{0}_V$ wird immer in den Nullvektor $\vec{0}_W$ des Bildes (W) abgebildet.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$f \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\} \text{ und } \text{Im}(f) = W$$
$$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n = \dim(\text{Im}(f))$$
$$\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar}$$
$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

D.h. die blaue Fläche ist ein Punkt / ein einziger Vektor in V .

Eigenschaften

$$\text{rg}(A) = \begin{aligned} &\text{Anzahl der führenden Einsen in der Matrix } A \text{ auf Zeilenstufenform} \\ &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von } A \\ &= \dim(\text{Im}(f)) \end{aligned}$$

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix)

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Es wird immer die **Standardbasis** verwendet wenn nichts Weiters definiert.

$f \rightarrow$ Abbildungsmatrix

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A = (f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}_{z.B.}$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = A$$

Abbildungsmatrix $\rightarrow f$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

Abbildung ohne Darstellungsmatrix: $f(\vec{x})$

$$f\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 - 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Abbildung mit Darstellungsmatrix: $A\vec{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 - 5 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Kern

Ker(f) die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$$

Kern und Basis bestimmen → freie Variable

Bsp:

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & 4 & 5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge beschreibt eine Gerade durch Ursprung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$\text{Ker}(f)$ hat als Basis einen Richtungsvektor und ist eindimensional:

$$\text{Ker}(f) = \text{Lin}(\vec{v}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = t\vec{v} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\}$$
$$\dim(\text{Ker}(f)) = 1 \quad \text{Anzahl der freien Variablen (= Richtungsvektoren)}$$

Bild

$$\text{Im}(f) = \text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

Bild und Basis bestimmen → führende Variablen

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine freie Variable, d.h. die Vektoren sind linear abhängig.

Ein Vektor ist demnach zu viel für eine Basis.

Verzicht auf Vektor $\vec{a}_3$, da eine Lin.komb. der anderen beiden Vek. genügt.

Das Bild von f ist ein 2-dimensionaler Raum:

$$\text{Im}(f) = \text{Lin}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 2 \quad \text{Anzahl der führenden Variablen}$$

Umkehrabbildung

= Inverse der Abbildungsmatrix

Voraussetzungen für Bijektivität:

- Definitionsbereich und Wertebereich müssen übereinstimmen

- Die Abbildungsmatrix muss invertierbar sein, d.h. $\det(A) \neq 0$

Bsp:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\vec{x} \mapsto f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Addition von linearen Abbildungen

$$3f - 5g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto (3f - 5g)(\vec{x}) = (3A - 5B)\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & -23 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 23y \\ 6x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Komposition von linearen Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Darstellungsmatrix $g \circ f$

$$C = GF = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$$

Somit ist $g \circ f$ wie folgt definiert:

$$g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \mapsto g \circ f(\vec{x}) = C \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - 3y.$$

Aufgaben

Bsp, Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Erinnerung: } f(\vec{a}) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) \quad \text{und} \quad \vec{a} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2$$

$$\vec{e}_x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$f(\vec{e}_x) = \frac{1}{3} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{6} f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

$$f(\vec{e}_y) = \frac{1}{3} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{6} f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = (f(\vec{e}_x) \quad f(\vec{e}_y)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bsp, Gegeben sind lineare Abbildungen:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bestimmen Sie } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

f ist linear, darum gilt:

$$\circ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\circ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$= -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ und } \lambda_3 = 1$$

Bsp, Für eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}_n$ gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = -x + 1, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = -x^2 + 2x - 1$$

1. Auf welches Polynom bildet f den Vektor $\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab?

$$f(\vec{a}) = 3f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 2f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 3x^2 + 2(-x + 1) - (-x^2 + 2x - 1) = 4x^2 - 4x + 3$$

2. Auf welches Polynom bildet f den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ab?

$$f(\vec{b}) = \lambda_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = -3 \end{cases}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren liefert: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$.

$$= 2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) - 2f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2x^2 - (-x + 1) - 2(-x^2 + 2x - 1) = 4x^2 - 3x + 1$$

Bsp, Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$f: \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_3 \quad p(x) \mapsto f(p(x)) = p'(x)$$

bezüglich der Monombasen $\mathcal{M}_4 = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ von $\mathbb{P}_4$

und $\mathcal{M}_3 = (1, x, x^2, x^3)$ von $\mathbb{P}_3$.

Bilder der Basisvektoren berechnen und Koordinatenvektor bzgl $\mathcal{M}_3$:

$$\mathcal{M}_3 A_{\mathcal{M}_4} = \begin{pmatrix} (f(1))_{\mathcal{M}_3} & (f(x))_{\mathcal{M}_3} & (f(x^2))_{\mathcal{M}_3} & (f(x^3))_{\mathcal{M}_3} & (f(x^4))_{\mathcal{M}_3} \end{pmatrix}_{\mathcal{M}_4}$$

$$f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \Rightarrow (f(x^3))_{\mathcal{M}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{M}_3}$$

Es folgt:

$$\mathcal{M}_3 A_{\mathcal{M}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{M}_3}$$

Transformation

Transformationmatrix = Abbildungsmatrix

Transformationen sind umkehrbar (bijektiv) wenn $\det(A) \neq 0$

Spiegelung

- Geraden $g: ax + by = 0$
- Mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$$

$$A_g^2 = I_2$$

$$A_E = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

- $E: ax + by + cz = 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$S = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

Streckung

- x -Richtung λ_1
- y -Richtung λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

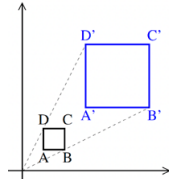
$$f_{zs}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto f_{zs}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung

- Faktor λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



Orthogonalprojektion auf Gerade / Vektor

Abbildungsmatrix, Projektion auf $\vec{a}$ (= Richtungsvektor):

$$A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \vec{a}^T$$

Bsp: Projektion auf die Gerade $g: 2x - y = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. Projektion auf } \vec{v}$$

$$A_P = \frac{1}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \vec{v}^T = \frac{1}{1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild von } \vec{x}: A_P \vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- $E: ax + by + cz = 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a, b, und c zuerst normieren, e.g: $a / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} \quad A_P := \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & |\vec{n}|^2 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & |\vec{n}|^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

$$\text{Ausserdem gilt: } A_P^2 = A_P$$

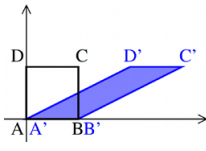
Scherung

- In x -Richtung
- Mit Faktor m

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = (f(\vec{e}_x) \ f(\vec{e}_y)) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



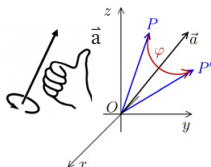
Ursprung und Bild haben gleichen Flächeninhalt.

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist.

$$A_{\vec{a}, \varphi} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1 - \cos(\varphi)) & a_1 a_2(1 - \cos(\varphi)) - a_3 \sin(\varphi) & a_1 a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_2 \sin(\varphi) \\ a_1 a_2(1 - \cos(\varphi)) + a_3 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1 - \cos(\varphi)) & a_2 a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_1 \sin(\varphi) \\ a_1 a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_2 \sin(\varphi) & a_2 a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_1 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

$$\text{wobei } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } |\vec{a}| = 1$$



Rotation

Rotation um den Winkel φ

- Um den Ursprung
- Um den Winkel φ

$$x - \text{Achse: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi = (f(\vec{e}_x) \ f(\vec{e}_y))$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$y - \text{Achse: } \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$z - \text{Achse: } \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer Drehmatrix ist immer gleich 1:

$$\det(A_\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

Komposition von Transformationen

Transformation **A** gefolgt von Transformation **B** = **BA**

$$\text{Bsp: Streckung } A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ gefolgt von Scherung } A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = A_s A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

Aufgabe 20. Drehstreckungen in $\mathbb{R}^2$ mit Dreh- und Streckungszentrum O sind lineare Abbildungen. Eine solche Drehstreckung bildet den Punkt $P = (2; 2)$ auf den Punkt $Q = (-4; 0)$ ab.

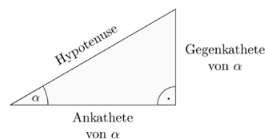
$$1. \text{ Drehwinkel} = \text{Winkel zwischen } \vec{OP} \text{ und } \vec{OQ} \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$2. \text{ Streckfaktor: } k = \frac{|\vec{OQ}|}{|\vec{OP}|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$3. A = \text{Drehmatrix mit Drehwinkel } \frac{3\pi}{4} \\ \text{Darstellungsmatrix der zentrischen Streckung mit Faktor } k \\ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4}) & -\sin(\frac{3\pi}{4}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) & \cos(\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Nachtrag

Matrix

Eine Matrix **B** finden, so dass $AB = 0$ (**A** ist gegeben).

1. **Basisvektor** $\vec{x}$ finden, so dass $A\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \text{LGS}$

2. Jede Spalte in **B** ist ein Vielfaches von $\vec{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Begrifflichkeiten

Orthogonal

Alle Vektoren in der Matrix stehen senkrecht zueinander. Es gilt:

$$A^T = A^{-1}$$

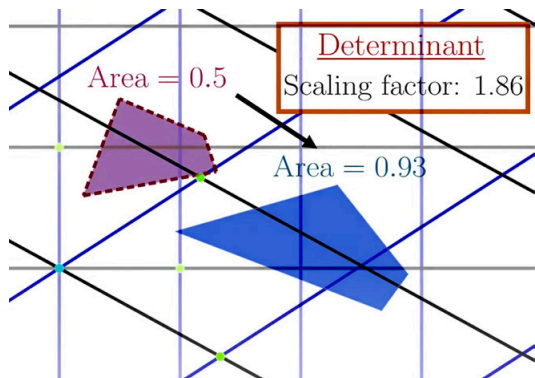
Eine Transformations-Matrix rotiert oder skaliert alle Vektoren gleich.

Singuläre Matrix: $\det(A) = 0$, non-invertible

Regulär Matrix: $\det(A) \neq 0$, invertible

Determinant (Jacobian)

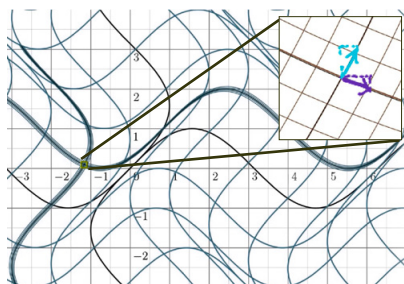
Die **Determinante** ist der **Skalierungsfactor** einer linearen Transformation.



Jacobian Matrix

Each element in the Jacobian Matrix is simply the change in x and y (dx and dy) in local space (infinitely zoomed in) of the transformation.

[youtube.com/watch?v=bohL918kXQk](https://www.youtube.com/watch?v=bohL918kXQk)



Transformation

$$\begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \sin(y) \\ y + \sin(x) \end{bmatrix}$$

Evaluating a Jacobian Matrix gives you the local change in x and y.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(1) \approx 0.54 \\ \cos(-2) \approx -0.42 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpose

$$(Ax)^T = x^T A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

The transpose is the **rotation** in a Translation-Matrix that changes the orientation from one basis to the other.

It also represents the transformation Matrix that transforms a vector from higher or lower space to a lower or higher space. For example $X^T \cdot v$ represents a transformation from 3D to 2D.

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Symmetrische Matrizen

Multipliziert man eine beliebige Matrix mit ihrer Transpose, erhält man eine quadratische, symmetrische Matrix. Zudem sind dann die Spalten die Eigenvektoren. Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix sind parallel (orthogonal) zueinander.

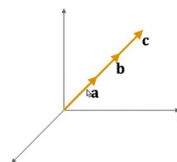
$$AA^T_{m \times m} \quad A^T A_{n \times n}$$

Rang (Rank)

Rank is the dimensionality of the space spanned by a Matrix.

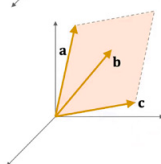
Anzahl Vektoren (linear unabhängige Basisvektoren), die benötigt werden, um einen Vektorraum auszudrücken. Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}]$$



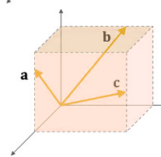
$\text{Rank}(A) = 1$

Die Vektoren sind **kolinear** (nicht linear unabhängig) und können nur einem Vektor ausgedrückt werden.



$\text{Rank}(A) = 2$

Die Vektoren sind **koplanar** (liegen auf der selben Ebene im Raum), es genügt zwei Vektoren, um Raum (e.g. die Fläche) auszudrücken.



$\text{Rank}(A) = 3$

Alle Vektoren in der Matrix A werden benötigt, um Raum auszudrücken.

Derivative of a Matrix

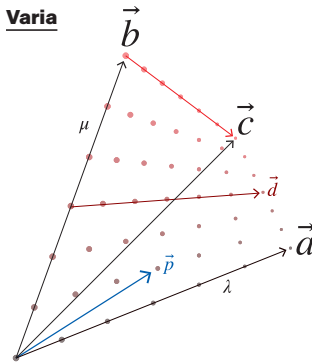
The derivative of a matrix is the derivative of the transformation

→ Jacobian-Matrix

$$\frac{d}{dx} Ax = A \quad \frac{d}{dx} kx = k$$

$$\frac{d}{dx} x^T Ax = 2Ax \quad \frac{d}{dx} kx^2 = 2kx$$

Varia



$$\vec{d} = (1 - \mu) \vec{a} + \mu (\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{p} = \lambda \vec{d} + \mu \vec{b}$$