

Griechisches Alphabet

Α α	Β β	Γ γ	Δ δ	Ε ε	Ζ ζ
ALPHA [a] ἄλφα	BETA [b] βῆτα	GAMMA [g] γάμμα	DELTA [d] δέλτα	EPSILON [e] ἒ ψιλόν	ZETA [dz] ζῆτα
Η η	Θ θ	Ι ι	Κ κ	Λ λ	Μ μ
ETA [ɛ] ἦτα	THETA [tʰ] θῆτα	IOTA [i] ἰώτα	KAPPA [k] κάππα	LAMBDA [l] λάμβδα	MU [m] μῦ
Ν ν	Ξ ξ	Ο ο	Π π	Ρ ρ	Σ σ ς
NU [n] νῦ	XI [ks] ξῖ	OMICRON [o] ὀ μικρόν	PI [p] πί	RHO [r] ῥῶ	SIGMA [s] σίγμα
Τ τ	Υ υ	Φ φ	Χ χ	Ψ ψ	Ω ω
TAU [t] ταῦ	UPSILON [u] ὀ ψιλόν	PHI [pʰ] φεῖ	CHI [kʰ] χῖ	PSI [ps] ψῖ	OMEGA [ɔː] ὦ μέγα

Dynamik Translation

Dynamik (Teilgebiet der Mechanik) beschreibt die **Bewegung** von Körpern in ihrer Abhängigkeit von den **einwirkenden Kräften**.

Freiheitsgrade

Ein 3-dimensionaler starrer Körper hat **6 Freiheitsgrade**:
3 Translationen entlang x, y, z und 3 Rotation um die Körperachsen.

Kraft (Force)

A push or pull on an object.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \begin{array}{l} \vec{F}: \text{Kraft in Newton [N]} \\ m: \text{Masse in kg} \\ \vec{a}: \text{Beschleunigung in } \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \quad N = kg \frac{m}{s^2} = kg \cdot ms^{-2} = \frac{J}{m} \quad m: \text{Meter}$$

$$F \left(kg \cdot \frac{m}{s^2} \right) = m (kg) \cdot a \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

Grundgesetze der Bewegung (Newtonsche Mechanik)**Newton'sche Axiome**

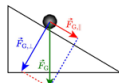
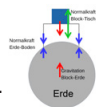
- Trägheitsgesetz:** Ohne äussere Kräfte bleibt der Impuls erhalten.
Hat nur in Inertialsystemen Gültigkeit. Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem ein Körper **ohne äussere Kräfte in Ruhe bleibt** oder sich **geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit** bewegt.
→ Keine Beschleunigung oder Rotation des Bezugssystems.

2. Bewegungsgesetz (Impulsänderung):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} m \vec{v} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = m \cdot \vec{a} = m \cdot g$$

3. Wechselwirkungsgesetz:

Actio = Reactio $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$
Kräfte treten immer paarweise auf.



- Kräfte sind Vektoren** und addieren sich vektoriell.
Kräfte lassen sich immer in ihre Komponenten zerlegen

Diese Bewegungsgesetze gelten analog für die **Rotation**.

Kraft F [N] und Arbeit W [J]**Kraft (Force) F [Newton N]**

Kräfte beschleunigen Masse. Kräfte sind Vektoren.

Ein Newton ist die Grösse der Kraft F , die aufgebracht werden muss, um einen **ruhenden Körper** der **Masse 1 kg** in **einer Sekunde** gleichförmig auf die Geschwindigkeit **1 ms⁻¹** zu **beschleunigen**.

$$\vec{F} = \frac{d}{ds} \vec{p} = \frac{d}{ds} \vec{v} \cdot kg = kg \frac{\vec{v}}{s} = kg \frac{ms^{-1}}{s} = kg \frac{m}{s^2} = kg \cdot \vec{a} = N$$

Newton N ist eine zusammengesetzte Grösse und keine SI-Grundeinheit.

Arbeit W und Energie E [Joules J]

Eine Kraft F wirkt über eine Distanz.

Das Joule (Skalar) ist die Arbeit, die verrichtet wird, wenn die **Kraft von 1 Newton über eine Strecke von 1 Meter** ausgeübt wird.

$$J = kg \frac{m^2}{s^2} = Nm = \text{Kraft } N \cdot \text{Weg } m$$

Kinematik Translation

Kinematik (Teilgebiet der Mechanik*) beschreibt die **Bewegung** von Körpern rein geometrisch mit den Grössen **Ort, Zeit, Geschwindigkeit** und **Beschleunigung**.

* Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung und Verformung von Körpern sowie den dabei wirkenden Kräften.

Die Bewegung eines Körpers ist vollständig beschrieben durch:

- seinen Ort r ,
- seine Geschwindigkeit v , und
- seine Beschleunigung a

Acceleration (Beschleunigung) [m/s²]

Acceleration = Rate of change of velocity over time.

$$a(t) [ms^{-2}] = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad a(t) [ms^{-2}] = \frac{\vec{F}(t)}{m} = g$$

$$a = \frac{v}{t} \quad a = \frac{v^2}{2s} \quad a = \frac{2s}{t^2}$$

Velocity (Geschwindigkeit) [m/s]

$$v(t) [ms^{-1}] = \int a(t) dt = \frac{d}{dt} x(t) \quad v = at \quad v = \sqrt{2as} \quad v = \frac{2s}{t}$$

Schnelligkeit = Absolute Geschwindigkeit $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Position (Ort) [m]

$$x(t) = \int v(t) dt = \left(\int v(t) dt \right) + x_0 = \left(\int \left(\int a(t) dt \right) + v_0 dt \right) + x_0 = \int \int a(t) dt dt + v_0 t + x_0$$

$$s = \frac{1}{2} at^2 \quad s = \frac{vt}{2} \quad s = \frac{v^2}{2a} \quad \text{bei konstanter Beschleunigung}$$

Numerische Integration

Riemann Sum: Approximation of an integral

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i-1}{N-1}(b-a) + a\right)$$

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}(b-a) + a \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

Schiefer Wurf

Allgemeine Lösungen:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \vec{g} = \text{const.}$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}_0 dt = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

$$r_x(t) = v_{0x} \cdot t \rightarrow t = \frac{r_x}{v_{0x}}$$

$$r_y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$$

$$r_y(r_x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{r_x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \frac{r_x}{v_{0x}} = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} \cdot r_x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot r_x$$

Maximale Höhe: Wenn $v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0$ Maximum erreicht → ableiten

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \rightarrow y_{\max} = \frac{v_0^2 (\sin(\alpha))^2}{2g} + y_0$$

Flugzeit t bis Aufprall berechnen → Mitternachtsformel

$$y(t) = 0 = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \quad x_{\max} = v_0 \cos(\alpha) t$$

Bei welchem r_x ist $r_y = 0$? → $r_y(r_x) = 0$

$$r_x = \frac{2}{g} v_{0x} v_{0y} = \frac{2}{g} |\vec{v}_0|^2 \sin(2\alpha)$$

Kinematik am Kreis

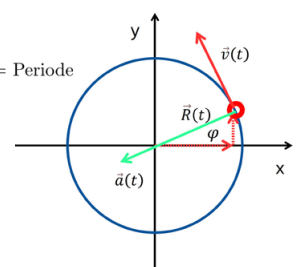
$$\vec{R}(t) = |\vec{R}| \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \varphi(t) = \omega t = \frac{2\pi}{T} t \quad T = \text{Periode}$$

$$\vec{v}(t) = |\vec{R}| \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)) = |\vec{R}| \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Zentripetalbeschleunigung: $|a| = |\vec{R}| \omega^2$

Die Beschleunigung a zeigt in die Gegenrichtung des Radius.



Kräfte [N]

Kräfte ändern den Impuls eines Körpers: Eine Kraft F ist eine äussere vektorielle Einwirkung auf einen Körper, infolge dessen sich die Geschwindigkeit bzw. der Impuls des Körpers ändert.

Kräfte zeigen immer weg vom Körper, bzw. Kräfte ziehen.

Konstante Geschwindigkeit = Keine Beschleunigung = Die Summe aller Kräfte ist Null.

$$\vec{F} = \frac{d}{ds}\vec{p} = kg\frac{m}{s^2} = kg \cdot \vec{a} = N$$

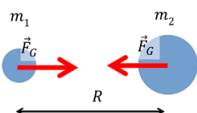
Vier fundamentale Kräfte (Wechselwirkungen)

- **Gravitation:** Anziehung zwischen zwei Massen
Schwach im Vergleich zu elektromagnetischen Kräften
- **Elektromagnetische Kraft:** z.B. Lorentzkraft.
Alle Formen von Reibung = Bindungskräfte zwischen Atomen
- **Starke Kernkraft:** Hält Atomkern zusammen
- **Schwache Kraft:** Radioaktiver Beta-Zerfall

Gravitationsgesetz

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad G: \text{Gravitationskonstante} \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$$

$$G \frac{m_T m_S}{R^2} = a_s m_S \rightarrow a_s = G \frac{m_T}{R^2}$$

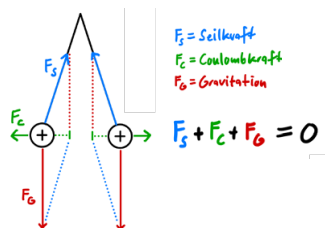
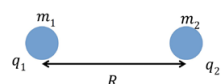


Elektromagnetische Kraft

Coulombgesetz: Kraft zwischen zwei Ladungen.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

$$\epsilon_0: \text{Feldkonstante} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(V m)}$$



Federkräfte

Federkräfte sind elektrostatische Kräfte.

Lineare Feder (Hookesches Gesetz)

$$\vec{F}(t) = -k\vec{x}(t)$$

k : Federkonstante
in Einheit Newton/Meter = N/m

$$\text{Federkonstante } k = \left| \frac{\Delta F}{\Delta x} \right|$$

x = Auslenkung (displacement)



Beschleunigung

Die Beschleunigung ist proportional zu x .

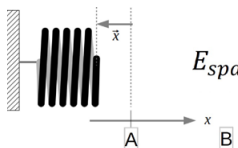
$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = -\frac{k}{m}\vec{x}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

Position

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad \text{Kreisfrequenz } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Spannenergie

Energie wandelt sich stätig von Spannenergie (potentielle Energie) zu kinetische Energie und wieder zu Spannenergieum.



$$E_{\text{spann}} = \frac{1}{2}k(B^2 - A^2) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{F^2}{2k}$$

$$E_{\text{kin}}(x=0) = E_{\text{spann}}(x=B) = \frac{1}{2}kB^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{kB^2}{m}}$$

k = Federkonstante [N/m]

Stoss und Impuls

Bei einem Stoss wird Impuls ausgetauscht. Mit **Impulserhaltung** und **Energieerhaltung** kann man komplizierte **Stossprozesse** mit einer einfachen **Vorher-Nachher Analyse** untersuchen.

Impulserhaltung: Gesamtimpuls eines mechanisch abgeschlossenen Systems ist konstant.

Impuls (Bewegungsgrösse)

Impuls (engl. *Momentum*). Umgangssprachlich *Schwung*. Eine äussere Kraft (Beschleunigung) ändert den Impuls.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = kg \frac{m}{s} = Ns$$

Kraftstoss (= Impulsänderung)

Eine äussere Kraft ändert den Impuls.

$$u = v' = v \text{ nach dem Stoss}$$

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = m \cdot (v' - v) = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

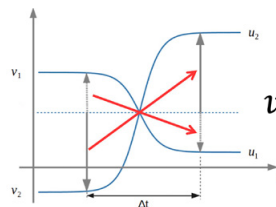
$$\Delta \vec{p}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\vec{v}$$

Elastischer Stoss

Beim elastischen Stoss kommen nur konservative Kräfte vor (keine Deformation, keine Wärmeentwicklung).

Die kinetischen (mechanische) Energie bleibt erhalten → Energieerhaltung

Die Geschwindigkeiten der beiden Körper werden an der **Schwerpunktgeschwindigkeit** gespiegelt:



$$v_{Spt} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Verhältnis der Massen zu Verhältnis Δv :

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = -\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$$

Kann zur Berechnung der einzelnen Variablen verwendet werden wenn **keine kinerische Energie** im System ist und nur die **Impulserhaltung** berücksichtigt werden muss (z.B. Wurf aus dem Stillstand).

Stossformel (für vollständige Impuls- und Energieerhaltung)

$$v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \quad v'_2 = v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

Die Stossformel sind aus der Formel der **Impuls-** und **Energieerhaltung** und der **Relativgeschwindigkeits-Beziehung** abgeleitet.

Die **relativ Geschwindigkeitsdifferenzen** kehren sich bei der Spiegelung um:

$$v'_1 - v'_2 = v_2 - v_1$$

Impulserhaltung

Ohne äussere Kraft bleibt der Impuls erhalten.

Stossen Körper miteinander, bleibt der Impuls erhalten.

$$\begin{aligned} \Delta p_1 + \Delta p_2 &= 0 & \Delta p_1 &= -\Delta p_2 \\ m_1 \cdot \Delta v_1 + m_2 \cdot \Delta v_2 &= 0 & m_1 \Delta v_1 &= -m_2 \Delta v_2 \\ m_1(v'_1 - v_1) + m_2(v'_2 - v_2) &= 0 & m_1 \cdot (v'_1 - v_1) &= -m_2 \cdot (v'_2 - v_2) \end{aligned}$$

Impulsbilanz

Vor dem Stoss = nach dem Stoch

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{aligned}$$

Energieerhaltung

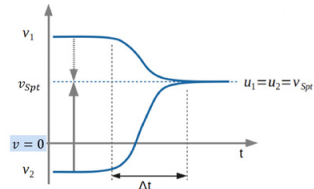
Zweite Gleichung zur Berechnung der zwei Unbekannten u_1 und u_2 .

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},v} &= E_{\text{kin},u} \\ \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} &= \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

Inelastischer Stoss

Beim inelastischen Stoss kommen nicht-konservative Kräfte vor (Verformung, Wärmeentwicklung etc.). Es geht Energie aus dem mechanischen System verloren.

Beim inelastischen Stoss fahren beide Körper nach dem Stoss mit der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunkts weiter.



Mechanische Energie geht verloren

Mechanische Energie wird in Deformation, Schall, Wärme umgesetzt. Impuls bleibt aber erhalten.

Nach dem unelastischen Stoss bewegen sich die Körper gemeinsam mit

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Kinetische Energie **vor dem Stoss**

$$E_{\text{kin, vorher}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Kinetische Energie **nach dem Stoss**

$$E_{\text{kin, nachher}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$$

Beispiel Rakete

$$v_{\text{rel}} = v_{\text{rakete}} - v_{\text{treibstoff}}$$

q Massenstrom
 v_{rel} Relativgeschwindigkeit

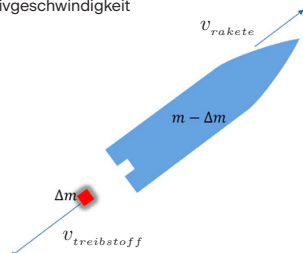
$$F_{\text{schub}} = \frac{dm}{dt} \cdot v_{\text{rel}} = q \cdot v_{\text{rel}}$$

Keine äussere Kraft: $\Delta p = 0$

$$a(t) = \frac{q \cdot v_{\text{rel}}}{m(t)}$$

Mit Gravitationskraft: $\Delta p = \vec{F}_G = m \cdot g$

$$a(t) = \frac{q \cdot v_{\text{rel}}}{m(t)} - g$$



Reibungs- und Gleitkräfte

Reibung zeigt immer **entgegen der Geschwindigkeit**.

Reibungsarten

Äussere Reibung (Trockene Reibung)

Zwischen den Kontaktflächen von sich berührenden Festkörpern:

- Haftreibung
- Gleitreibung
- Rollreibung, Wälzreibung, Bohrreibung, Seilreibung

Innere Reibung (Viskose Reibung)

Zwischen benachbarten Teilchen bei Verformungsvorgängen innerhalb von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen: **Laminar** oder **Turbulent**.

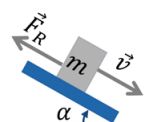
Trockene Reibung

Normalkraft (schiefe Ebene):

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Trockene Reibung ist betragsmässig **proportional zur Normalkraft**.
Zeigt immer entgegen der Zugkraft oder der Geschwindigkeit

$$|\vec{F}_R| = \mu |\vec{F}_N| \quad \mu \text{ Reibungskoeffizient}$$



$$\vec{F}_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot (-\vec{e}_v)$$

Reibungskraft ist **unabhängig von Geschwindigkeit v**.

Reibarbeit

$$E_{\text{verlust}} = F_R \Delta x = \mu \cdot F_N \cdot \Delta x \quad \text{J}$$

$$F_R = \frac{E_{\text{verlust}}}{\Delta x} \quad \text{N}$$

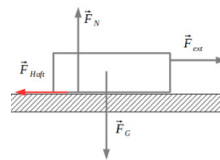
Komplizierter Übergang vom Haften zum Gleiten



Haftreibung (Statische Reibung)

Verhindert, dass ein Objekt zu gleiten beginnt.

Wirkt, wenn zwei Körper aufeinander liegen und sich nicht bewegen (= haften).



Haftreibung ist **variabel** und gleicht äussere Kraft aus bis zu einem Maximalwert:

$$|\vec{F}_{\text{Haft}}| \leq \mu \vec{F}_N$$

$$\vec{F}_{\text{Haft}} = -\vec{F}_{\text{ext}}$$

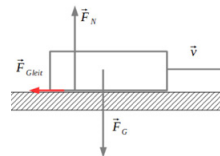
Kondition, damit ein Objekt nicht in Bewegung versetzt wird und damit Haftreibung wirkt:

$$\text{Zugkraft } F_{\text{ext}} \leq \mu \vec{F}_N$$

Gleitreibung (Kinetische Reibung)

Wirkt, wenn ein Objekt über eine Oberfläche gleitet.

Gleitreibung tritt ein, sobald sich das Objekt bewegt.



Die Gleitreibungskraft ist **konstant** und immer entgegen v gerichtet:

$$\vec{F}_{\text{Gleit}} = \mu_{\text{Gleit}} \vec{F}_N$$

$$F_{\text{Brems}} = m \cdot a$$

$$F_R = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_n = \mu_{\text{Gleit}} \cdot m \cdot g$$

$$a = \mu_{\text{Gleit}} \cdot g$$

Kondition für Gleitreibung: Kraft oder Beschleunigung, die es benötigt, um ein Objekt in Bewegung zu versetzen.

$$F_{\text{Zug}} > \mu_H \cdot F_n$$

$$a > \mu_H \cdot g$$

Bremsweg und Gleitreibungskoeffizient berechnen:

$$s_{\text{Brems}} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_{\text{Gleit}} \cdot g} \quad \mu_{\text{Gleit}} = \frac{v_0^2}{2s_{\text{Brems}} \cdot g}$$

Viskose Reibung

Innere Reibung bei Flüssigkeiten.

Laminar Reibung

Proportional zur Geschwindigkeit. Laminare Reibung ist eher selten.

Kugel in einer Flüssigkeit (Stokesche Reibung):

$$\vec{F}_R = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \vec{e}_v$$

η : Materialkonstante Viskosität, Einheit Pa · s,
Wert für Öl ungefähr 0.1

r : Radius der Kugel

v : Geschwindigkeit der Kugel

$\vec{e}_v$: Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit

Turbulente Reibung

Proportional zur Geschwindigkeit im Quadrat.

Wirbel erhöhen die Reibungskraft.

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot c_w \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{e}_v$$

ρ : Dichte des Mediums

A : Stirnfläche

c_w : Widerstandsbeiwert

v : Geschwindigkeit

Beispiel: Was ist die konstante Geschwindigkeit v_0 bei einer Hangneigung?

Konstant bedeutet $F = 0$.

$$|\vec{F}_{\text{res}}| = |\vec{F}_L| - |\vec{F}_R| = 0$$

$$= m \cdot g \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot c_w \cdot v_0^2 = 0$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \sin(\varphi)}{\frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot c_w}}$$

Arbeit W [Joules J]

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx \quad J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \quad \text{Arbeit [J] = Kraft [N] \cdot Weg [m]}$$

Konstante Beschleunigung (konstante Kraft)

$$W = F_x \Delta x = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \int P dt$$

Arbeit kennzeichnet immer einen **Vorgang oder Prozess**.

Die von einem Körper oder an einem Körper verrichtete Arbeit ist gleich der **Änderung seiner Energie**:

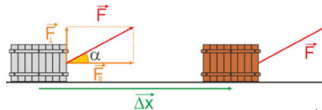
$$W = \Delta E = E_{nachher} - E_{vorher}$$

Arbeitsformen

- Hubarbeit / Gewichtskraft
- Reibarbeit
- Deformationsarbeit / Spannarbeit
- Beschleunigungsarbeit

Richtung der Kraft

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \cdot |\Delta \vec{x}| = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

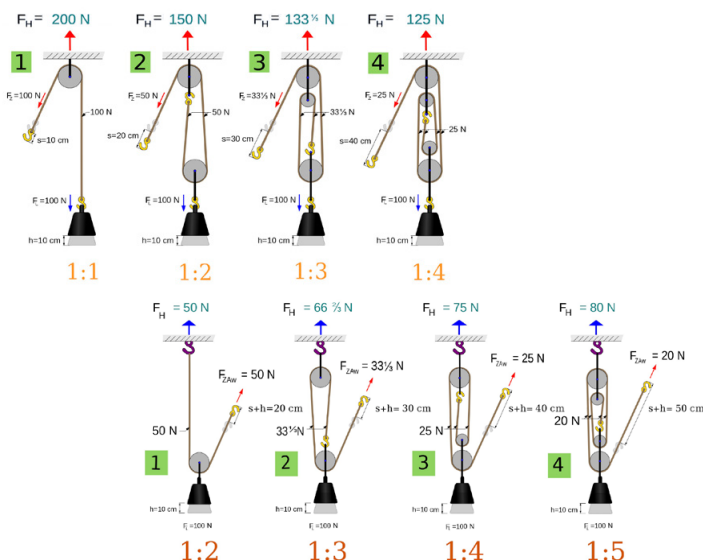


Verrichtet Hubarbeit bei konstanter Geschwindigkeit

$$W = m \cdot g \cdot h \quad \begin{matrix} h & \text{Höhendifferenz} \\ m & \text{Masse} \end{matrix}$$

Konstante Geschwindigkeit bedeutet: $\vec{F}_{Zug} + \vec{F}_G = \vec{0}$

Flaschenzug



Radialkraft

Bedingung für eine stabile Kreisbahn:

$$R^3 \omega_0^2 = GM \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\vec{F}_{Rad} = \vec{F}_G \rightarrow \frac{v_1^2}{r} m = G \frac{mM}{r^2} \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Escape velocity

$$E_{bind} = -\Delta W = -\int_R^\infty G \frac{mM}{r'^2} dr' = \left[-G \frac{mM}{r'} \right]_R^\infty = G \frac{mM}{r}$$

$$E_{kin} = E_{bind} \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \text{Erde: } v_2 = 11.2 \frac{km}{s}$$

E_{bind} Bindungsenergie im Gravitationsfeld

Leistung P [Watt W]

Leistung P [W] ist erbrachte Arbeit W [J] pro Zeit:

$$P [W] = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = \frac{dW}{dt} = Fv = \frac{mg \Delta h [J]}{\Delta t [s]} = \frac{Nm}{s}$$

Energie E [Joules J]

Energie charakterisiert den **Zustand eines Körpers** oder eine **geleistete Arbeit**.

Hubarbeit $\rightarrow$ potenzielle Energie

$$E_{pot} = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot g \cdot h$$

Arbeit in die Translationsbewegung $\rightarrow$ kinetische Energie der Translation

$$E_{trans} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Arbeit in die Rotationsbewegung $\rightarrow$ kinetische Energie der Rotation

$$E_{rot} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Arbeit, um eine Feder zu spannen $\rightarrow$ Spannenergie

$$E_{spann} = \int_0^s F_{Feder} \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot s^2$$

Reibungsarbeit $\rightarrow$ Energieverlust durch Reibung

$$E_{reib} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{reib} \cdot \ell$$

* für konstante Kräfte

Kinetische Energie

Die kinetische Energie des Körpers setzt sich zusammen aus

Translations- und Rotationsenergie:

$$E_{tot} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Energieerhaltung

- Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist konstant
- Gesamtimpuls eines mechanisch abgeschlossenen Systems ist konstant
- Drehimpulserhaltung: Die Summe aller Drehimpulse bleibt konstant
- Kinetische Energie der Rotation als Teil der Gesamtenergie

Energie kann in verschiedene Formen umgewandelt werden (z.B. Potentielle Energie, kinetische Energie, etc.).

Ein System mit Energie, übt auf ein anderes System Kräfte aus.

Potentielle Energie einer Masse im Schwerfeld der Erde	$E_{pot} = mgh$	m : Masse [kg] g : 9.81 ms ⁻² h : Höhe [m]
Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$	m : Masse [kg] v : Geschwindigkeit [ms ⁻¹]
Federenergie	$E_s = k \frac{(x-L)^2}{2}$	k : Federkonstante [kg/s ²] L : Ruhelänge der Feder [m] x : Länge der Feder [m]

Federenergie in maximale Geschwindigkeit umwandeln:

$$E_s = E_{kin} \quad \frac{k}{2} (x-L)^2 = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m} (x-L)^2}$$

$$E_{pot} = E_{kin} \quad mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Energieerhaltung vs. Impulserhaltung

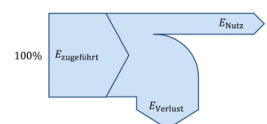
Am einfachsten anwendbar ist...

- Energieerhaltung: Wenn es keine Verluste (Reibung) gibt.
- Impulserhaltung: Wenn es keine äussere Kräfte gibt.

Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad η (griechisch «Eta») ist eine dimensionslose Zahl, meistens zwischen 0 und 1, und beschreibt die Effizienz eines Systems:

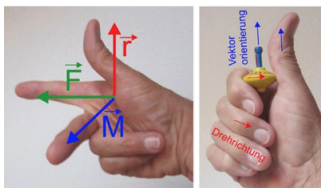
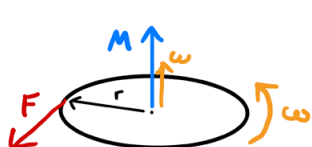
$$\eta = \frac{\text{Nutzenergie}}{\text{zugeführte Energie}} = \frac{E_{Nutz}}{E_{zugeführt}}$$



Kinematik und Dynamic Rotation

Größen

Translation		Rotation	
Weg	$\vec{x}$	Winkel	$\vec{\phi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$ [rad/s]
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$ [rad/s²]
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ [Nm]
Bewegungsgleichung der Translation	$\vec{F} = m\vec{a}$	Grundgleichung der Rotation	$\vec{M} = J\vec{\alpha}$ [Nm]
Masse	m	Massenträgheitsmoment	$J_{\text{diskret}} = \sum m_i r_{\perp i}^2$ $J_{\text{kont}} = \int_V r_{\perp}^2 dm$ [kg m²]
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J\vec{\omega}$ [Nms]
Impulsänderung = Kraftstoß	$d\vec{p} = \vec{F} dt$	Drehimpuls-Änderung	$d\vec{L} = \vec{M} dt$
Kinetische Energie	$T = \frac{1}{2} m \vec{v} ^2$	Rotations-Energie	$T = \frac{1}{2} J \vec{\omega} ^2$ [J]



Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) [rad/s]

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{M}{J} t \quad \vec{\omega}(t) = \int_0^t \vec{\alpha}(t') dt' \quad \omega = \frac{v}{r}$$

Kreisfrequenz [rad/s]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad f \text{ Frequenz [Hz = 1/s]} \quad T \text{ Periodendauer [s]}$$

Tangentialbeschleunigung a [m/s²]

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = \alpha \cdot R$$

Bahn-/Tangentialgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{\text{tan}} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \vec{v} = \omega \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{a}_{\text{tan}} = \frac{d\vec{v}_{\text{tan}}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Kraft [N]

$$F = \frac{M}{r} = \frac{J\alpha}{r} \text{ N}$$

Winkelbeschleunigung alpha [rad/s²]

$$\vec{\alpha} = \frac{M}{J} = \frac{r \cdot F}{J} \quad \alpha(t) = \frac{\omega(t)}{t} \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

Winkel

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \vec{\phi}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t') dt'$$

Frequenz [Hz]

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Drehmoment M [Nm]

$$\vec{M} = \vec{r}_{S \rightarrow F} \times \vec{F} = J\vec{\alpha}$$

$$M = F \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$\text{Drehimpulssatz: } \vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L}$$

Trägheitsmoment J (engl. Moment of Inertia) [kg·m²]

Beschreibt den Widerstand eines Körpers gegen Drehbeschleunigung. Für ein **Punktteilchen** gilt:

$$J = m \cdot r_{\perp}^2 \quad r_{\perp} \text{ Abstand zur Drehachse, senkrecht zu } v \text{ bzw. } F$$

Drehimpuls L (engl. Angular Momentum) [Nms = kg·m²·s⁻¹]

Der Gesamtdrehimpuls kann in zwei Teile zerlegt werden:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{Eigen}}$$

Bahndrehimpuls (Rotation relativ zu einem beliebigen Bezugspunkt)

$$\vec{L}_{\text{Bahn}} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad L = r_{\perp} p = r_{\perp} m v$$

$\vec{r}$ Ortsvektor des Körpers relativ zum einem beliebigen Bezugssystem

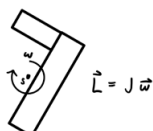
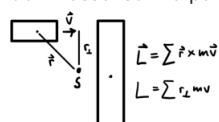
$r_{\perp}$ Abstand senkrecht zu v

v relative Geschwindigkeit zum Bezugssystem

Eigendrehimpuls (Rotation um eigene Achse)

$$\vec{L}_{\text{Eigen}} = J\vec{\omega}$$

Damit $\vec{L}_{\text{Bahn}} = \vec{L}_{\text{Eigen}}$ gilt, muss der Bezugspunkt auf der Drehachse durch den Massenschwerpunkt liegen.



Drehimpulserhaltung: Die Summe aller Drehimpulse bleibt konstant. Ohne externes Drehmoment, d.h. $M = 0$, bleibt der Drehimpuls im System erhalten. Für zwei Körper in Kontakt gilt:

$$\Delta \vec{L}_A = -\Delta \vec{L}_B$$

Kraftstoß: Ein konstantes Drehmoment ändert den Drehimpuls:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t$$

Massenschwerpunkt S

Der Schwerpunkt ist der gewichtete Mittelwert über alle Ortsvektoren. Der Schwerpunkt muss nicht zwingend im Körper sein!

$$\vec{r}_S = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{r}_i \quad \vec{r}_{0,S} = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \vec{r} \rho(\vec{r}) dz dy dx$$

r_i Schwerpunkt Körper

Schwerpunktsatz

Eine an einem beliebigen Punkt eines Körpers angreifende Kraft F

- bewirkt eine **Translation des Schwerpunktes**, so als ob F direkt an S angreifen würde; und
- ein **Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r}_S \times \vec{F}$ **um den Schwerpunkt S**, wobei $\vec{r}_S$ von S nach P zeigt. Ein Körper rotiert um seinen Massenmittelpunkt.

Greifen Kräfte ausserhalb des Schwerpunkts an, erzeugen sie zusätzlich Drehmomente, die den Körper rotieren lassen.

Es spielt keine Rolle wo die Kraft angreift, das Objekt bewegt sich gleich schnell (Situation im Weltall ohne Boden und ohne Reibung). Der Schwerpunkt eines Körpers beschleunigt immer gleich, unabhängig davon, wo die Kraft angreift.

Rolle auf schiefer Ebene

Trägheitsmoment durch Auflagepunkt

$$J = J_{\text{Spt}} + m \cdot R^2$$

Drehmoment aus der Gewichtskraft

$$M = R \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

Tangentialbeschleunigung a

$$a = \alpha \cdot R = \frac{R^2 \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{J_{\text{Spt}} + m \cdot R^2}$$

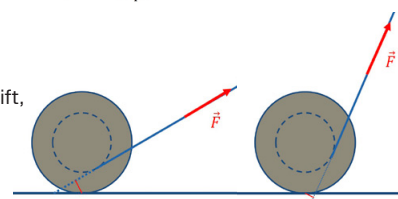
Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{R \cdot m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{J_{\text{Spt}} + m \cdot R^2}$$

Rotation am Untergrund

Bei einer Kraft F die im kürzesten Abstand $r_{\perp}$ zur Drehachse angreift, kann man auch skalar rechnen:

$$M = r_{\perp} F \quad [\text{Nm}]$$

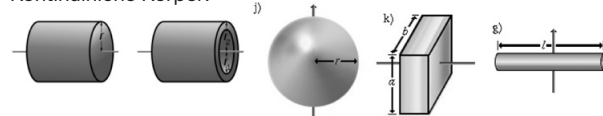


Trägheitsmoment J (engl. Moment of Inertia)

Das Trägheitsmoment J entspricht der Masse m in der Translation und ist Masse mal Abstand im Quadrat:

$$J = \sum_1^N m_i r_{\perp i}^2 \quad J = \iiint_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \quad r_{\perp} \text{ Abstand zur Drehachse}$$

Kontinuierliche Körper:



Vollzylinder

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

Hohlzylinder

$$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$

Kugel

$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Quader

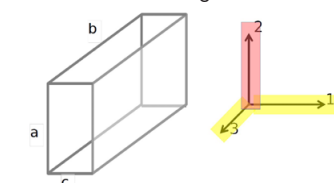
$$J = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Dünner Stab

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$

Stabile Achsen

Ein Quader hat 3 Trägheitsmomente



$$J_1 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

$$J_3 = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2)$$

$$c < a < b: J_3 < J_2 < J_1$$

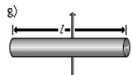
Rotation ist **stabil** um das höchste und kleinste Trägheitsmoment J_1, J_3

Rotation ist **instabil** um das mittlere Trägheitsmoment J_2

Satz von Steiner

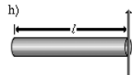
- Das **Trägheitsmoment J durch den Schwerpunkt** ist minimal
- Verschiebt sich die Drehachse um eine Strecke a aus dem Schwerpunkt, **erhöht sich das Trägheitsmoment**

$$J_A = J_S + ma^2 \quad a \text{ Abstand zum Schwerpunkt}$$



Dünner Stab durch Schwerpunkt

$$J = \frac{1}{12} ml^2$$



Dünner Stab durch Rand

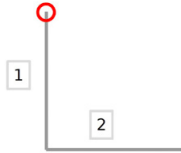
$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Zusammengesetzte Körper

$$J_1 = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$J_2 = \frac{1}{12} mL^2 + m(L^2 + (L/2)^2)$$

$$J = J_1 + J_2$$

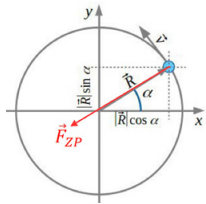


Trägheitskräfte

Wenn sich das Bezugssystem beschleunigt (z. B. Kurve, Rotation, Bremsen), gilt das Trägheitsgesetz nicht direkt. Dann müssen sogenannte **Scheinkräfte** (z. B. Trägheitskraft, Zentrifugalkraft) eingeführt werden.

Zentripetalkraft = Kraft von aussen

Eine gleichförmige Kreisbewegung benötigt immer eine zum Drehzentrum gerichtete Kraft. Beispiel: Erdrotation um Sonne.



$$F = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

m : Masse des Körpers
 ω : Winkelgeschwindigkeit in rad/s
 v : Bahngeschwindigkeit in m/s
 r : Abstand zum Drehzentrum

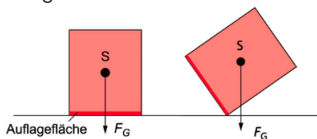
Zentrifugalkraft = Kraft von innen

Wirkt radial von der Rotationsachse nach aussen. Wird durch die Trägheit des Körpers verursacht.

Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft werden gleich berechnet, aber zeigen in entgegengesetzter Richtung.

Wann kippt ein Körper

Ein kritischer Punkt bezüglich Standfestigkeit ist genau dann erreicht, wenn die am Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft durch den Rand der Auflagefläche verläuft.



Equations of Motion

Euler Integration

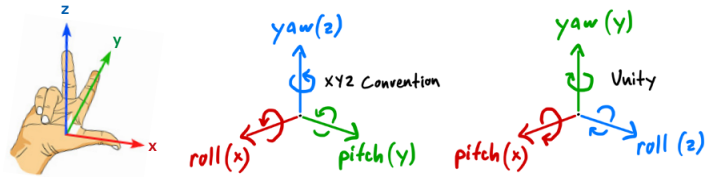
TODO

Verlet Integration

TODO

Koordinatensystem

Rechtehandregel:



Varia

m/s → km/h

$$1 \frac{m}{s} = x \frac{km}{h}$$

$$m = \frac{1}{1000} km, \quad s = \frac{1}{3600} h$$

$$x = 1 \left(\frac{1}{1000} \right) \frac{km}{\left(\frac{1}{3600} \right) h} = 3.6 \frac{km}{h}$$

km/h ↔ m/s

$$x \frac{km}{h} = x \cdot 10^3 \cdot 60^{-2} \frac{m}{s}$$

$$x \frac{m}{s} = x \cdot 10^{-3} \cdot 60^2 \frac{km}{h}$$

Winkelmaß umrechnen

$$r = d \frac{\pi}{180} \quad d = r \frac{180}{\pi}$$

Quadratmeter umrechnen

→ m²

$$x [km^2] = x \cdot (10^3)^2 [m^2] = x \cdot 10^6 [m^2]$$

$$x [cm^2] = x \cdot (10^{-2})^2 [m^2] = x \cdot 10^{-4} [m^2]$$

$$x [mm^2] = x \cdot (10^{-3})^2 [m^2] = x \cdot 10^{-6} [m^2]$$

m² →

$$x [m^2] = x \cdot (10^{-3})^2 [km^2] = x \cdot 10^{-6} [km^2]$$

$$x [m^2] = x \cdot (10^2)^2 [cm^2] = x \cdot 10^4 [cm^2]$$

$$x [m^2] = x \cdot (10^3)^2 [mm^2] = x \cdot 10^6 [mm^2]$$

Quaternions

Quaternions are a 4-dimensional extension of the complex numbers. What the complex numbers are for two dimensions, the quaternions are for three dimensions. They solve the gimbal lock problem: When two euler rings line up, we lose a degree of freedom.

Definition

$$q = a + bi + cj + dk \quad \text{real part, vector part}$$

Pure quaternion if **real part** is 0 ($a = 0$).

Unit quaternions describe 3D rotations, so that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$

Conjugate:

$$q^* = a - bi - cj - dk \quad \text{Norm} \quad \|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Inverse

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \quad \text{If } q \text{ is a unit quaternion } \|q\| = 1 \quad q^{-1} = q^*$$

$$a = \cos(\theta/2)$$

$$b = v_1 \sin(\theta/2)$$

$$c = v_2 \sin(\theta/2) \quad v = (v_1, v_2, v_3) \text{ is the axis of rotation}$$

$$d = v_3 \sin(\theta/2) \quad \theta \text{ is the rotation angle in radians}$$

$$q = \cos(\theta/2) + \hat{v}_1 \sin(\theta/2)i + \hat{v}_2 \sin(\theta/2)j + \hat{v}_3 \sin(\theta/2)k \\ = \cos(\theta/2) + (v_1 i + v_2 j + v_3 k) \sin(\theta/2)$$

$\cos(\theta/2)$ and $\sin(\theta/2)$ are precomputed.

Multiplication

Multiplication Rules

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k \quad jk = i \quad ki = j \\ ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j$$

Hamilton product:

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{bmatrix}$$

$$p = (x, y, z) = xi + yj + zk = 0 + xi + yj + zk$$

$$q \cdot p = (-bx - cy - dz) \\ + (ax + cy + dz)i + (ay + bx + dz)j + (az + by + cx)k$$

$$pq^* = (xb + yc + zd) \\ + (ax + yd - zc)i + (ay + zb - xd)j + (az + xc - yb)k$$

Rotation

$$p' = qpq^* = \begin{bmatrix} 1 - 2b^2 - 2c^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & 1 - 2c^2 - 2a^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & 1 - 2a^2 - 2b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= (1 - 2b^2 - 2c^2 - 2d^2)x + (2bc - 2ad)y + (2bd + 2ac)z \\ + (2bc + 2ad)x + (1 - 2c^2 - 2a^2)y + (2cd - 2ab)z \\ + (2bd - 2ac)x + (2cd + 2ab)y + (1 - 2a^2 - 2b^2)z$$

$$qpq^* = qpq^{-1} \text{ if } q \text{ is a unit quaternion } \|q\| = 1$$

Rodrigues' Rotation Formula

Allows rotation of a vector without using a matrix:

$$p' = p \cos \theta + (v \times p) \sin \theta + v(v \cdot p)(1 - \cos \theta)$$

p is the vector being rotated. $\times$ represents the cross product.
 v is the unit rotation axis vector. $\cdot$ represents the dot product.
 θ is the rotation angle in radians.

Rotation Axis to Euler Angles

Rotations

α around **x-axis** (roll)

β around **y-axis** (pitch)

γ around **z-axis** (yaw)



$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\alpha = 0 \quad (\text{for most cases})$$

$$\beta = \text{atan2}(v_3, \sqrt{v_1^2 + v_2^2}) \\ = \arccos(v_3)$$

atan2 is numerically more stable.

$$\gamma = \text{atan2}(v_2, v_1)$$

Euler Angles to UV Coordinates

$$U = \frac{\gamma + \pi}{2\pi} \quad V = \frac{\pi/2 - \beta}{\pi}$$

Euler Angles to Rotation Axis

1. Compute individual rotation matrices:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

2. Multiply them in XYZ order $R = R_z R_y R_x = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha)$

3. Extract the rotation axis v and angle θ from R :

$$v_1 = \frac{R_{32} - R_{23}}{2 \sin \theta} \quad v_2 = \frac{R_{13} - R_{31}}{2 \sin \theta} \quad v_3 = \frac{R_{21} - R_{12}}{2 \sin \theta}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2} \right) \quad \text{Tr}(R) = R_{11} + R_{22} + R_{33}$$

4. Normalize the Axis Vector v

$$v = \frac{(v_1, v_2, v_3)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Euler Angles to Quaternion (XYZ Convention)

$$q_x = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, 0, 0 \right) \quad q_z = \left(\cos \frac{\gamma}{2}, 0, 0, \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\ q_y = \left(\cos \frac{\beta}{2}, 0, \sin \frac{\beta}{2}, 0 \right)$$

$$q = q_z \cdot q_y \cdot q_x \\ = \cos(\theta/2) + \hat{v}_1 \sin(\theta/2)i + \hat{v}_2 \sin(\theta/2)j + \hat{v}_3 \sin(\theta/2)k$$

$$a = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$b = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$c = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$d = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Quaternion to Euler Angles (XYZ Convention)

$$\alpha = \text{atan2}(2(ab + cd), 1 - 2(b^2 + c^2))$$

$$\beta = \arcsin(2(ac - db))$$

$$\gamma = \text{atan2}(2(ad + bc), 1 - 2(c^2 + d^2))$$

At $\beta = \pm 90^\circ$, the system loses a degree of freedom

This can cause **gimbal lock** if $|\beta| = 90^\circ$ (i.e., $|\beta| = \frac{\pi}{2}$), making yaw (γ) undefined.

If $\beta = +90^\circ$, we **set yaw (γ) to zero** and modify roll (α).

If $\beta = -90^\circ$, we **set yaw (γ) to zero** and modify roll (α).

Otherwise, we compute all three angles normally.

Interpolation (SLERP)

$$q(t) = \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin[t\theta]}{\sin \theta} q_2$$

Beispielaufgaben

Lösungsstrategien

Mit **Impulserhaltung** und **Energieerhaltung** kann man komplizierte **Stossprozesse** mit einer einfachen **Vorher-Nachher Analyse** untersuchen.

Energieerhaltung vs. Impulserhaltung

Am einfachsten anwendbar ist...

- **Energieerhaltung:** Wenn es keine Verluste (Reibung) gibt.
- **Impulserhaltung:** Wenn es keine äusseren Kräfte gibt.

Energieerhaltung

$$E_{pot} = E_{kin} \quad mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Impulserhaltung

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2 \quad m_1 \cdot (v'_1 - v_1) = -m_2 \cdot (v'_2 - v_2)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad E_{kin,v} = E_{kin,u}$$

Sie möchten einen Ball von $r_0 = 5$ m auf $r_{max} = 25$ m werfen.

Wie gross muss v_0 sein?

Lösung mit Energieerhaltung: $E_{kin} + E_{pot,0} = E_{pot,max}$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g r_0 = m g r_{max}$$

Kürze m :

Anfangshöhe: $r_0 = 5$ m

Maximalhöhe: $r_{max} = 25$ m

Erdbeschleunigung: $g = 9.81$ m/s²

Am höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit $v = 0$

$$\frac{1}{2} v_0^2 + g r_0 = g r_{max}$$

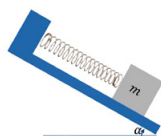
$$\frac{1}{2} v_0^2 = g(r_{max} - r_0)$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot (25 - 5) \text{ m}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 20}$$

$$v_0 = \sqrt{2g(r_{max} - r_0)}$$

$$v_0 = \sqrt{392} \approx 19.8 \text{ m/s}$$

Leiten Sie eine Formel für die Auslenkung der Feder her.



$$F = -kx \rightarrow \sin(\alpha) \cdot m \cdot g = -kx$$

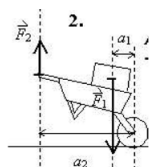
Ein Auto rollt reibungsfrei im Leerlauf mit einer Restgeschwindigkeit von $v_A = 20$ m/s den Hang herauf. Wie hoch muss das Auto sein, so dass seine Geschwindigkeit noch $v_B = 10$ m/s beträgt. ($m = 500$ kg, $g = 10$ m/s²)

$$E_{kin}^A = E_{kin}^B + E_{pot}^B \rightarrow E_{pot}^B = E_{kin}^A - E_{kin}^B$$

$$mgh_B = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow gh_B = \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{1}{2} v_B^2$$

$$h_B = \frac{1}{2g} (v_A^2 - v_B^2) = 15 \text{ m}$$

Mit welcher Kraft muss man am an der Griffstange senkrecht zum Boden nach oben drücken, um die Schubkarre in der Stellung zu halten?



$$a_1 \times F_1 = a_2 \times F_2$$

$$|F_2| = \frac{a_1}{a_2} |F_1|$$

Ein Stein wird mit der Geschwindigkeit 15 m/s senkrecht nach oben geschossen. In welcher Höhe ist die Geschwindigkeit nur noch halb so gross wie beim Abschuss?

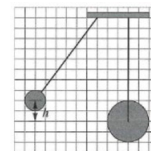
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v^2}{2} \right) + mgh \rightarrow h = \frac{1}{2g} \left(v^2 - \left(\frac{v^2}{2} \right)^2 \right) = 8.6 \text{ m}$$

Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die Massen kurz vor und nach dem Zusammenstoss? Die Massen verhalten sich wie 1:8 ($m_1 = 1$ kg, $m_2 = 8$ kg).

$$E_{pot} = E_{kin} \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 6.26 \text{ m/s}$$

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = -4.87 \text{ m/s}$$

$$u_2 = v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 1.39 \text{ m/s}$$



Ein Schlitten der Masse 60 kg startet aus der Ruhe von einem Hügel aus 20 m Höhe und erreicht den Fuss des Hügels mit einer Geschwindigkeit von 16 m/s. Welchen Betrag an Energie hat er durch Reibung verloren?

$$E_{pot} = E_{kin} - E_{verlust}$$

$$E_{verlust} = mgh - \frac{1}{2} m v^2 = 4092 \text{ J}$$

Die zurückgelegte Distanz beträgt 40 m.

Wie gross war die mittlere, totale Reibungskraft?

$$E_{verlust} = F_R \Delta x \rightarrow F_R = \frac{E_{verlust}}{\Delta x} = 102.3 \text{ N}$$

Von einem Rollwagen $m_1 = 20$ kg der sich mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 2.0$ m/s bewegt, springt ein Junge $m = 60$ kg in Gegenrichtung ab. Wie verändert sich die Geschwindigkeit des Wagens, wenn der Junge nach dem Absprung gegenüber dem Boden in Ruhe ist.

$$v_2 = v_1, \quad u_2 = 0$$

$$m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2)$$

$$u_1 = v_1 + \frac{m_2 v_2}{m_1} - \frac{m_2 u_2}{m_1} = v_1 + \frac{m_2}{m_1} (v_2 - u_2) = 8 \text{ m/s}$$

Berechnen sie die mittlere Kraft, die der Junge auf den Wagen ausübt, wenn der Absprung 0.1 s dauert.

$$\Delta p = F \Delta t \rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{m(-v_2)}{\Delta t} = 1200 \text{ N}$$

Ein Auto besitzt Räder mit Radius 30 cm. Es startet aus der Ruhe und beschleunigt in 6 s gleichförmig auf eine Geschwindigkeit von 18 m/s.

Bestimmen sie die Beschleunigung des Autos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 3 \text{ m/s}^2$$

Die Winkelbeschleunigung der Räder:

$$\alpha = \frac{a}{r} = 10 \text{ rad/s}^2$$

Die Rotationsenergie eines Rades unter der Annahme, dass das Rad ein Zylinder mit Radius 0.3 m und einem Gewicht von 10 kg ist:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = 810 \text{ J}$$

$$J_{\text{vollzylinder}} = \frac{1}{2} m r^2 = 0.45 \text{ kg m}^2$$

$$\omega = \alpha t = \frac{v}{r} = 60 \text{ rad/s}$$

Ein Klotz mit Masse $m = 1$ kg fällt von und wird von einer Feder ab einer Höhe $x_1 = 2$ m aufgefangen und kommt bei einer minimalen Höhe von $x_3 = 1$ m zur Ruhe. Berechnen Sie den Wert der Federkonstante ($g = 10$ m/s²).

$$E_{pot,1} = m g x_1 = 20 \text{ J}$$

$$E_{pot,2} = m g x_2 = 10 \text{ J}$$

$$E_{Feder} = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \rightarrow k = \frac{2 E_{Feder}}{(x_2 - x_1)^2} = 20 \text{ N/m}$$

$$E_{Feder} = E_{pot,2} - E_{pot,1}$$

Ein Block wird auf der schiefen Ebene losgelassen und beginnt mit Reibung zu gleiten. Welche Formen von Arbeit werden verrichtet und wie könnte man diese berechnen?

Arbeitsformen: Reibarbeit und Beschleunigungsarbeit

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_R \quad \text{N}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \Delta x \cdot \cos(\theta) = \vec{F} \Delta \vec{x} \quad \text{J}$$

Ein Mann hängt an einem Fallschirm und sinkt mit konstanter Geschwindigkeit nach unten. Wie würden sie die maximale Geschwindigkeit berechnen, die sich mit der Zeit einpendelt?

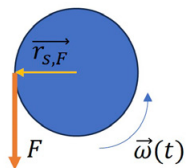
Nur Luftwiderstand und Gravitationskraft haben Einfluss:

$$F_L + F_G = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_L = -F_G$$

$$mg = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v_{max}^2$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \cdot \rho \cdot A}}$$

Gegeben ist eine gewickelte Spulen mit Radius 0.1 m und Masse 2 kg. Es greift eine Kraft von 1 N am äusseren linken Punkt an. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung.



$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{r \cdot F}{J} = 10 \text{ rad/s}^2$$

$$M = r \cdot F = 0.1 \text{ Nm}$$

$$J = \frac{1}{2} m r^2 = 0.01 \text{ kg m}^2$$

Während eines starken Regenschauers fallen die Regentropfen mit der Geschwindigkeit von 15 m/s auf das Autodach. Pro Sekunde sollen 200 g Regen auf das Autodach gelangen.

a) Wie grossist die Impulsänderung von 200 g Regen, wenn man davon ausgehen kann, dass der Regen nach der Wechselwirkung mit dem Dach die Geschwindigkeit Null hat.

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = m \cdot (v' - v) = -3 \text{ Ns (kg ms}^{-1}\text{)}$$

b) Berechne den Betrag der mittleren Kraft, welche der Regen auf das Autodach ausübt.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 3 / 1 = 3 \text{ N}$$

Ein Motor erreicht nach 60s eine Drehzahl von 7200/min bei gleichmässiger Beschleunigung. Eine an ihm befestigte Scheibe hat den Durchmesser 1.2m.

Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{7200}{60} = 240\pi \text{ rad/s}$$

Berechnen Sie die Umfangsgeschwindigkeit nach 30s

$$v_{tan} = \omega(30) \cdot r = \alpha t \cdot r = 144\pi \text{ m/s}$$

Ein masseloses Velorad hat einen Durchmesser von 1 m. Aussen am Rad ist ein Gewicht von 2 kg befestigt. Um das Rad ist eine Schnur gewickelt, an deren Ende ein 3 kg schwerer Stein hängt.

Wie schnell rotiert das Rad nach 1 Sekunde?

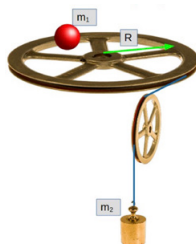
$$\alpha = \frac{M}{J} = 30 \text{ rad/s}^2$$

$$M = F \cdot r = 20 \text{ Nm}$$

$$J = m r^2 = 0.5 \text{ kg m}^2$$

$$\omega(t) = \alpha t = 30t \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4.78 \text{ Hz}$$



Wie schnell fällt ein Jojo?

Welches Trägheitsmoment muss eingesetzt werden?

Das Jojo dreht um den Aufhängepunkt → Satz von Steiner

$$\omega(t) = \frac{M}{J} t$$

$$M = R \cdot F = R \cdot m \cdot g$$

$$M = J \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{M}{J}$$

$$J_R = J_S + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

