

Wurzel-schreiweisen:

Art der Wurzel	Wurzel-Schreibweise	Potenz-Schreibweise
Allgemeine Hauptregel	$\sqrt[m]{x^m}$	$x^{\frac{m}{n}}$
Normale Quadratwurzel	$\sqrt{x}$	$x^{\frac{1}{2}}$
Kubikwurzel (u. höhere)	$\sqrt[3]{x}$	$x^{\frac{1}{3}}$
Mit Potenz im Inneren	$\sqrt{x^2}$	$x^{\frac{2}{2}}$
Wurzel im Nenner (Bruch)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{-\frac{1}{2}}$
Kombination (Nenner + Potenz)	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$	$x^{-\frac{2}{3}}$

e-Funktion:

Ausgangsfunktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Stammfunktion $F(x)$ ("Aufleitung")
e^x	bleibt gleich: e^x	bleibt fast gleich: $e^x + C$
e^{-x}	Vorzeichenwechsel: $-e^{-x}$	Vorzeichenwechsel: $-e^{-x} + C$

Spezielle Ableitung für Wurzeln

Ausgangsfunktion $f(x)$	Umschreiben als Potenz	Ableitung $f'(x)$ (Potenzregel)	Stammfunktion $F(x)$ ("Aufleitung")
$\sqrt{x}$	$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}x^{-3/2}$	$2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$

Notationszeichen:

Symbol	Bedeutung	Erklärung / Beispiel
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	1, 2, 3, ... (oft auch mit der 0, je nach Definition)
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen mit Null	0, 1, 2, 3, ... (absolut eindeutig mit 0)
$\mathbb{N}^* / \mathbb{N}^+$	Natürliche Zahlen ohne Null	1, 2, 3, ... (absolut eindeutig ohne 0)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	Alle Brüche (z.B. $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}$)
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	Alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl (inkl. π , e , $\sqrt{2}$)
Symbol	Bedeutung	Leseweise / Beispiel
$\in$	Element von	" $x \in \mathbb{R}$ " (x ist eine reelle Zahl)
$\notin$	Kein Element von	" $-1 \notin \mathbb{N}^*$ " (-1 ist keine positive natürliche Zahl)
$\Rightarrow$	Daraus folgt (Implikation)	"Es regnet $\Rightarrow$ Die Straße ist nass"
$\Leftrightarrow$	Genau dann, wenn (Äquivalenz)	Beide Aussagen bedingen sich gegenseitig zu 100 %
$\forall$	Für alle	" $\forall x \in \mathbb{R}$ " (Für alle reellen Zahlen x gilt...)
$\exists$	Es existiert (mindestens ein)	" $\exists C \in \mathbb{R}$ " (Es gibt eine Konstante C...)
$\setminus$	Ohne (Mengendifferenz)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Alle reellen Zahlen außer der Null)

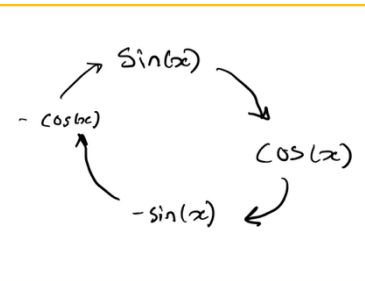
Wurzelgesetze:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sqrt{a^2 \cdot b^2} &= a \cdot b \quad \checkmark \\ \rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} &= \frac{a}{b} \quad \checkmark \\ \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &\neq a + b \quad \times \\ \rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} &\neq a - b \quad \times \end{aligned}$$

Ableitung Potenzierter Trig. Funktionen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Vereinfachte Form
$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$	$\sin(2x)$
$\cos^2(x)$	$2 \cos(x) \cdot (-\sin(x))$	$-\sin(2x)$

Ableitung: Derivat



L.I.A.T.E.: Erkenne $u(x)$

1. Logarithmus Funktionen (z.B. $\ln(x)$, $\ln(3x+1)$, $\ln(x^2)$, $\log_{10}(x)$, $\log_a(x)$)
2. Inverse Trigonometrische Funktionen (z.B. $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$)
3. Algebraische Funktionen (z.B. x , x^2 , $1+2x$, x^3+7 , $\sqrt{x}$, 5)
4. Trigonometrische Funktionen (z.B. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$)
5. Exponentialfunktionen (z.B. e^x , e^{-x})

Auswahl-Prozedur: Substitution vs. Partielle Integration

1. Habe ich eine Funktion und ihre (fast) exakte Ableitung?

$\rightarrow$ Substitution

- Wann? Wenn ein Teil des Integrals die Ableitung eines anderen Teils ist.
- Was? Wähle den komplizierteren Teil

2. Habe ich ein Produkt aus 2 verschiedenen Funktionstypen?

$\rightarrow$ Partielle Integration (L.I.A.T.E.)

Partielle Integration: Verfahren

$$\int x \cdot \sin(x) dx$$

S. 156
Papula

$$\text{LIATE: } u(x) = x \xrightarrow{\text{ab}} 1$$

$$v'(x) = \sin(x) \xrightarrow{\text{auf}} -\cos(x)$$

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$x \cdot -\cos(x) - \int 1 \cdot -\cos(x) dx$$

$$\therefore x \cdot -\cos(x) - \int -\cos(x) dx$$

Linearität

$$\therefore x \cdot -\cos(x) + \int \cos(x) dx$$

$$\therefore x \cdot -\cos(x) + \left[\sin(x) \right] \\ -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

Linearität des Integrals:

Konstante Faktoren die nicht von der Integrationsvariable (wie x oder ein anderer Buchstabe) können aus dem Integral gezogen werden.

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Mehrfache Partielle Integration: Verfahren

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{LIATE: } u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = 2x \quad \left| \quad e^{-x} \rightarrow -e^{-x} \right. \\ v(x) = -e^{-x}$$

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$x^2 \cdot -e^{-x} - \int 2x \cdot -e^{-x} dx$$

$$x^2 \cdot -e^{-x} - \int 2x \cdot -e^{-x} dx$$

Linearität:

$$x^2 \cdot -e^{-x} - (-2) \int x \cdot e^{-x} dx$$

$$u(x) = x \rightarrow 1 \\ v'(x) = e^{-x} \rightarrow -e^{-x}$$

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\therefore x \cdot -e^{-x} - \int 1 \cdot -e^{-x}$$

$$\therefore x \cdot -e^{-x} - (e^{-x})$$

$$\therefore x \cdot -e^{-x} - e^{-x}$$

$$\therefore x^2 \cdot -e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x})$$

$$\therefore x^2 \cdot -e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\therefore -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}$$

$-e^{-x}$ ausklammern:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

Partielle Integration mit Grenzen:

$$\int_0^1 e^x (x^2 - 1) dx$$

$$u(x) = x^2 - 1 \rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$\therefore u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\therefore (x^2 - 1) \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx$$

$$u(x) = 2x \rightarrow u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$$

$$\therefore u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\therefore 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx$$

$$\therefore [2x \cdot e^x - 2[e^x]]$$

$\therefore$ Zusammenfügen:

$$(x^2 - 1) \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2e^x)$$

$$\therefore (x^2 - 1) \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$\therefore (x^2 - 2x + 1) e^x$$

$$\text{Somit} \Rightarrow [(x^2 - 2x + 1) \cdot e^x]_0^1 \\ = \underline{\underline{-1}}$$

Integration durch Substitution:

Fall 1: unbestimmte Integral (ohne Grenzen)

Gewünschte: Stammfunktion (mit +C)

Verfahren:

1. Substitution wählen
2. Ableiten
3. Nach dx umstellen
4. Einsetzen & kürzen
5. Integrieren
6. Rücksubstitution

Beispiel:

$$\int \frac{6}{(2-3x)^2} dx \xrightarrow{\text{umschreiben}} \int 6 \cdot (2-3x)^{-2} dx$$

Faktorregel:

$$6 \int (2-3x)^{-2} dx$$

①

$$\begin{aligned} u(x) &= 2-3x \\ u'(x) &= -3 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -3 \quad | \cdot dx \\ du &= -3 \cdot dx \quad | : -3 \\ dx &= -\frac{1}{3} du \end{aligned}$$

③

$$\therefore 6 \int -\frac{1}{3} \cdot u^{-2} du$$

$$\therefore -\frac{6}{3} \int \frac{u^{-1}}{-1} du$$

⑤

$$\therefore -\frac{6}{3} \left[-u^{-1} \right]$$

$$-\frac{6}{3} \cdot -\frac{1}{(2-3x)}$$

⑥

$$\Rightarrow \frac{2}{(2-3x)} + C \quad \checkmark$$

Fall 2: Das bestimmte Integral (mit Grenzen)

Gewünschte: Konkreter Zahlenwert

Verfahren:

1. Substitution wählen
2. Ableiten und umstellen
3. Grenzen anpassen
4. Einsetzen und kürzen/umformen
5. Integrieren
6. Ausrechnen

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx \xrightarrow{\text{umschreiben}} \int_0^1 (1-x)^{-1/3} dx$$

②

$$\begin{aligned} u(x) &= 1-x \\ u'(x) &= -1 \end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned} \therefore \frac{du}{dx} &= -1 \quad | \cdot dx \\ du &= -1 \cdot dx \quad | : -1 \\ dx &= -du \end{aligned}$$

$\therefore$ Grenzen:

③

oben

$$u(x) \Rightarrow 1 - (1) = 0$$

$$\therefore \text{neu oben} = 0$$

unten

$$u(x) \Rightarrow 1 - (0) = 1$$

$$\text{neu unten} = 1$$

④

$$\int_1^0 \leftarrow \text{ist blöde} \rightarrow \text{umformen: } \int_a^b = -\int_b^a$$

$$\therefore -\int_0^1$$

$$\therefore -(-) \int_0^1 u^{-1/3} du$$

Potenz
aufleierungsregel

⑤

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 u^{-1/3} du \\ \therefore &\left[\frac{3}{2} u^{2/3} \right] \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned} \therefore &\frac{3}{2} (1)^{2/3} - \frac{3}{2} (0)^{2/3} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Spezialfall: $\tan(x)$

$$h) \int \frac{\tan(\ln(x))}{x} dx$$

$$\int \tan(\ln(x)) \cdot x^{-1} dx$$

$$u(x) = \ln(x) \xrightarrow{+} \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad | \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad | \div \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow x \cdot du$$

$$\int \frac{\tan(u)}{x} \cdot x du$$

Kürzen

$$\int \tan(u) du$$

Integrieren:

$$\left[-\frac{1}{1} \cdot \ln|\cos(u)| \right]$$

$$\therefore -\ln|\cos(\ln(x))| + C$$

Integraltafel:

$$\int \tan(ax) = -\frac{1}{a} \cdot \ln|\cos(ax)|$$

Spezialfall: Basis der Potenz
Substituieren

$$\int_0^{\pi} \cos^3(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$u(x) = \cos(x)$$

$$u'(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \quad | \cdot dx$$

$$du = -\sin(x) \cdot dx \quad | \div \sin(x)$$

$$dx = \frac{1}{-\sin(x)} du$$

Grenzen:

oben

$$u(x) \Rightarrow \cos(\pi) = -1$$

unten

$$u(x) \Rightarrow \cos(0) = 1$$

$$\therefore \int_1^{-1} u^3 \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{-\sin(x)} du$$

$$\therefore \int_1^{-1} -u^3 du$$

$$\left[-\frac{u^4}{4} \right]_1^{-1}$$

$$\therefore \left(\left(-\frac{(-1)^4}{4} \right) - \left(-\frac{(1)^4}{4} \right) \right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$4) y^2 = x^4 \cdot (4+x)$$

$$y = \sqrt{x^4 \cdot (4+x)}$$

$$2 \cdot \int_{-4}^0 \sqrt{x^4 \cdot (4+x)} dx$$

$$2 \cdot \int_{-4}^0 (x^4 \cdot (4+x))^{\frac{1}{2}} dx$$

$$2 \cdot \int_{-4}^0 x^2 \cdot (4+x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$u(x) = 4+x$$

$$u'(x) = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow dx = du$$

$$\therefore 2 \cdot \int_0^4 x^2 \cdot u^{\frac{1}{2}} du$$

Grenzen:

oben: 0

$$\rightarrow u(0) = 4+0$$

$$u(0) = \underline{4} \leftarrow \text{neu}$$

unten: -4

$$u(-4) = 4+(-4)$$

$$u(-4) = 0 \leftarrow \text{neu}$$

$$\int_0^4$$

Achtung alle x müssen raus! | Bei Substitution

Umsstell-trick:

$$u(x) = 4+x \rightarrow u = 4+x$$

nach x umstellen

$$x = u-4$$

$$\therefore 2 \cdot \int_0^4 (u-4)^2 \cdot u^{\frac{1}{2}} du$$

Binom

$$(u-4)(u-4) = u^2 - 8u + 16$$

$$\therefore 2 \cdot \int_0^4 (u^2 - 8u + 16) \cdot u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\left| \begin{array}{l} u^2 \cdot u^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{5}{2}} \\ -8u \cdot u^{\frac{1}{2}} = -8u^{\frac{3}{2}} \\ 16u^{\frac{1}{2}} = 16u^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

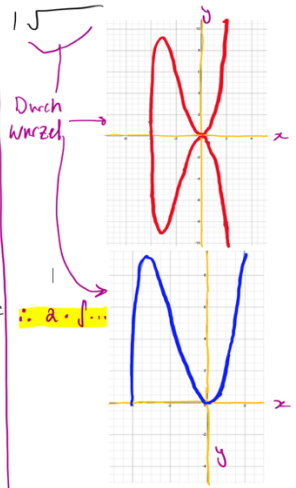
$$\therefore 2 \cdot \int_0^4 u^{\frac{5}{2}} - 8u^{\frac{3}{2}} + 16u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\therefore 2 \cdot \left[\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 8u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot 16u^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\therefore 2 \cdot \left[\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{3} u^{\frac{5}{2}} + \frac{32}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$\therefore 2(19,5)$$

$$\approx \underline{\underline{39}}$$



Partialbruch Zerlegung: $\frac{Z(x)}{N(x)}$

I Fall: Grad $N(x) >$ Grad $Z(x)$

und $N(x)$ hat Linearfaktoren

z.B. $\int \frac{1}{(x^2-9)} dx$

① Linear Faktoren: $N(x)$

$(x^2-9) \Rightarrow$ TR: $x_1=3$
 $x_2=-3$

② Ansatz:

Für einfache Nullstellen:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{1. \text{ Lin. Faktor}} + \frac{B}{2. \text{ Lin. Faktor}} + \dots$$

Für Doppelte Nullstellen:

z.B. $\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3} + \frac{D}{(x-4)^4}$

③ Koeffizienten bestimmen:

z.B.

$$\frac{1}{(x^2-9)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)} \quad | \cdot \text{GN}$$

$$\therefore \frac{1}{(x^2-9)} = \frac{A \cdot (x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{B \cdot (x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$\therefore 0x^2 + 0x + 1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$\therefore 0x^2 + 0x + 1 = Ax + 3A + Bx - 3B$$

Nach Faktoren umstellen:

$$\begin{cases} Ax + Bx = 0 \\ 3A - 3B = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{GLS lösen}} \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - 3B = 1 \end{cases}$$

z.B. $A = \frac{1}{6}$
 $B = -\frac{1}{6}$

④ Koeffizienten einsetzen:

z.B. $\int \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)} dx$

$$\therefore \int \frac{1}{6 \cdot (x-3)} - \frac{1}{6(x+3)} dx$$

⑤ Integrieren:

z.B. $\frac{1}{6} \int \frac{1}{(x-3)} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x+3)} dx$

$$\therefore \frac{1}{6} \cdot \ln|x-3| - \frac{1}{6} \cdot \ln|x+3| + C$$

Partialbruch Zerlegung: $\frac{Z(x)}{N(x)}$

II Fall: Grad $Z(x) \leq$ Grad $N(x)$

z.B. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$

① Polynom Division:

z.B. $x^2+3x-4 : (x^2-2x-8) = 1$
 $-(x^2-2x-8)$
Rest: $5x+4$

$$\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$1 \cdot (x^2-2x-8) = x^2-2x-8$$

$\therefore$ Resultat: 1 mit Rest von $5x+4$

$$\therefore 1 + \frac{5x+4}{x^2-2x-8}$$

① Linear Faktoren: $N(x)$

$$x^2-2x-8 \Rightarrow \text{TR: } x_1=4, x_2=-2$$

sonit: $(x-4)(x+2)$

② Ansatz:

Für einfache Nullstellen:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{1. \text{ Lin. Faktor}} + \frac{B}{2. \text{ Lin. Faktor}} + \dots$$

③ Koeffizienten bestimmen:

z.B.

$$\frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+2)} \quad | \cdot \text{GN}$$

$$\therefore \frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A \cdot (x+2)}{(x-4)(x+2)} + \frac{B \cdot (x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

$$5x+4 = A(x+2) + B(x-4)$$

$$\therefore 5x+4 = Ax + 2A + Bx - 4B$$

Nach Faktoren umstellen:

$$\begin{cases} Ax + Bx = 5 \\ 2A - 4B = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{GLS lösen}} \begin{cases} A + B = 5 \\ 2A - 4B = 4 \end{cases}$$

z.B. $A = 4$
 $B = 1$

④ Koeffizienten einsetzen:

z.B. $\int 1 + \frac{4}{(x-4)} + \frac{1}{(x+2)} dx$

⑤ Integrieren:

z.B. $\int 1 dx + 4 \int \frac{1}{x-4} dx + \int \frac{1}{x+2} dx$

$$= x + 4 \cdot \ln|x-4| + \ln|x+2| + C$$

Partialbruch Zerlegung: $\frac{Z(x)}{N(x)}$

III Fall: $Z(x)$ hat keine reellen Linearfaktoren

z.B. $\int \frac{1}{(x^2+1)} dx$

② Ansatz:

Für einfache Nullstellen:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Bx+C}{N(x)}$$

z.B. $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$

③ Koeffizienten bestimmen:

z.B.

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \quad | \cdot \text{GN}$$

$$\therefore \frac{1 \cdot (x^2+1)}{x^2+1} = \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \cdot (x^2+1)$$

$$\therefore 1 = Bx + C$$

$$\therefore 0x + 1 = Bx + C$$

$$\therefore B = 0$$

$$C = 1$$

④ Koeffizienten einsetzen:

z.B. $\int \frac{0x+1}{(x^2+1)} dx$

$$\therefore \int \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

⑤ Integrieren:

z.B. $\int \frac{1}{x^2+1} dx$

$$= \arctan x + C$$

Partialbruch Zerlegung: $\frac{Z(x)}{N(x)}$

IV Fall: Mischfall: Fall I und III

Sonderfall: $\int \frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} dx$

① Linear faktoren: $N(x)$

- $(x-1) \Rightarrow$ Fall I (Einfache Nullstelle)
- $(x^2+1) \Rightarrow$ Fall III (Keine Reelle Nullstelle)

② Ansatz:

z.B. $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{1. \text{ Lin Faktor}} + \frac{Bx+C}{\text{Nicht reeller Faktor}}$

$$\frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

③ Koeffizienten bestimmen:

z.B.

$$\frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \quad | \cdot \text{GN}$$

$$\therefore \frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A \cdot (x^2+1)}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \cdot (x-1)$$

$$\therefore 4x^2 + x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$4x^2 + x + 1 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

④ Koeffizienten Einsetzen:

z.B. $\int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1x+2}{x^2+1} \right) dx$

⑤ Integrieren:

z.B. $3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx$

$$= 3 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctan(x) + C$$

Taylorpolynom entwickeln:

1. Bedingungen:

Gewünschte Ordnung?

Gewünschtes Zentrum?

z.B.

Taylorpolynom 3. Ordnung $p_3(x)$

Entwicklungszentrum: $x_0 = 0$

Variante: 1 aka Maclaurin-Reihe
 $x_0 = 0$

Wenn Entwicklungszentrum = 0
wird die Reihe auch:
Maclaurin-Reihe
genannt.

2. $f(x)$ ableiten auf gewünschte Ordnung

z.B.

$$f(x) = \frac{1}{x+7}$$

3. Ordnung: $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$

3. Entwicklungszentrum in Ableitungen einsetzen

z.B.

Entwicklungszentrum: $x_0 = 0$

$$f(0) = \dots$$

$$f'(0) = \dots$$

$$f''(0) = \dots$$

$$f'''(0) = \dots$$

4. Taylorpolynom formal nutzen

S. 185 Papula

z.B.

Entwicklungszentrum: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{7} & f''(0) &= \frac{2}{243} \\ f'(0) &= -\frac{1}{49} & f'''(0) &= -\frac{6}{2401} \end{aligned}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{7} + -\frac{1}{49} \frac{1}{1!} (x-0)^1 + \frac{2}{243} \frac{1}{2!} (x-0)^2 - \frac{6}{2401} \frac{1}{3!} (x-0)^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{7} - \frac{1}{49}x + \frac{2}{243} \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{6}{2401} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{7} - \frac{1}{49}x + \frac{2}{243} \frac{1}{2} x^2 - \frac{6}{2401} \frac{1}{6} x^3$$

Achtung beim Bruch rechnen!

Es muss mit dem Kehrwert gerechnet werden:

$$\frac{\frac{2}{243}}{\frac{2}{2}} \Rightarrow \frac{2}{243} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{243}$$

5. Finale Lösung:

z.B.

$$f(x) = \frac{1}{7} - \frac{1}{49}x + \frac{1}{243}x^2 - \frac{1}{2401}x^3 \quad \checkmark$$

Taylorreihen: Entwicklung:

Variante: 2

Wenn Entwicklungszentrum $x_0 \neq 0$

1. Bedingungen:

Gewünschte Ordnung?

Gewünschtes Zentrum?

z.B.

Taylorpolynom 4. Ordnung $p_4(x)$

Entwicklungszentrum: $x_0 = 1$

2. $f(x)$ ableiten auf gewünschte Ordnung:

z.B.

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

4. Ordnung: $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x)$

3. Entwicklungszentrum in Ableitungen einsetzen:

z.B.

Entwicklungszentrum: $x_0 = 1$

$$f(1) = \dots$$

$$f'(1) = \dots$$

$$f''(1) = \dots$$

$$f'''(1) = \dots$$

$$f^{(4)}(1) = \dots$$

4. Taylorpolynom formal nutzen:

S. 185 Papula

z.B.

Entwicklungszentrum: $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} & f''(1) &= -\frac{1}{4} & f^{(4)}(1) &= -\frac{3}{4} \\ f'(1) &= \frac{1}{4} & f'''(1) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \frac{1}{1!} (x-1)^1 + \frac{1}{4} \frac{1}{2!} (x-1)^2 - \frac{3}{8} \frac{1}{3!} (x-1)^3 + \frac{3}{4} \frac{1}{4!} (x-1)^4$$

Achtung beim Bruch rechnen!

Es muss mit dem Kehrwert gerechnet werden:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

5. Finale Lösung:

z.B.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{1}{32}(x-1)^4 \quad \checkmark$$

Formel für Taylorkoeffizienten direkt auf Funktion anwenden:

Taylorpolynom 4te Ordnung

Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Funktion: $y = \cos^2(x)$

Auf Seite 187:

$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
----------	--	----------------

Hier wurde $\cos(x)$ mit Entwicklungszentrum:

$x_0 = 0$ bereits ausgerechnet!

Wir haben jedoch $\cos^2(x)$ deshalb:

Seite 97 Popula

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Standardreihe nehmen und $\cos(u)$ durch $u = 2x$ ersetzen,

$\therefore$ Also

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}$$

$$\therefore (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$$

$$\therefore (2x)^4 = 2^4 \cdot x^4 = 16x^4$$

$$\therefore 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}$$

$$\therefore 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 \right)$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$$

$$\therefore p_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}$$

① Bedingungen

② Standardreihe

S. 187

③ Winkelumformungsgleichung

S. 97

④ Ersetzen

⑤ Ausrechnen

⑥ Zusammenführen

Standardreihen Potenziert Vorgehen:

Taylorpolynom 4. Ord.

Entw. Wick. $\Rightarrow x_0 = 0$

Funktion: $y = \cos^2(x)$

$$\cos^2(x) = \cos(x) \cdot \cos(x)$$

Standardreihe für $x_0 = 0$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right)$$

um einfacher zu rechnen die Fakultäten ausmultiplizieren.

$$2! = 2$$

$$4! = 24$$

Multiplizieren:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)$$

① Bedingungen

② Standardreihe

2.1 Fakultäten ausmultiplizieren

③ Multiplikation

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 = 1 \\ 1 \cdot -\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} \\ 1 \cdot \frac{x^4}{24} = \frac{x^4}{24} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} \cdot 1 = -\frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^2}{2} \cdot -\frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} \\ -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^4}{24} = -\frac{x^6}{48} \end{pmatrix}$$

Exklusiv

STOP!!

Potenz = 6, wir brauchen nur bis 4

④ Auswahlverfahren

Auswahlverfahren: alles über Potenz = 4 weg

Zusammenfügen:

$$\therefore p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^4$$

$$p_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 \quad \checkmark$$

⑤ Zusammenführen

Entwicklung eines Taylorpolynoms mit einer Standardreihe:

4. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $y = \cos(x^2)$
 b) indem Sie die Taylorreihe für $f(u) = \cos(u)$ als Ausgangspunkt nehmen und die Substitution $u = x^2$ durchführen.

① Bedingungen

Taylor Ordnung: 4

Funktion: $y = \cos(x^2)$

Entwicklungszentrum: $x_0 = 0$

② Standardreihe

$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
----------	--	----------------

Seite 187

③ Substitution

Standardreihe:

$\cos(x)$, ich ersetze x mit x^2

$\therefore \cos(u)$, wobei $u = x^2$

④ Einsetzen

$$\therefore p_4(x) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!}$$

$$\Rightarrow p_4(x) = 1 - \frac{x^4}{2} \quad \checkmark$$

Approximation: 2ter Ordnung

Taylorpolynom 2. Ordnung:

① Bedingungen

$$\text{Gleichung} \Rightarrow \cos(x) = 2x^2$$

$$\text{Approximation} = \cos(x)$$

$$\text{Entwicklungszentrum} \Rightarrow x_0 = 0$$

$\cos(x)$, für $x_0 = 0$ und 2. Ordnung:

② Standardreihe

$$[t_f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}]$$

Einsetzen in die Gleichung:

③ Einsetzen

$$\cos(x) = 2x^2$$

$$\text{Allgemein: } t_f(x) = \text{Gleichung}$$

$$\therefore 1 - \frac{x^2}{2} = 2x^2$$

Nach x auflösen:

④ Auflösen

$$\therefore 1 - 0.5x^2 = 2x^2 \quad | + 0.5x^2$$

$$1 = 2.5x^2 \quad | : 2.5$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{5} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$x = 0,63246 \quad \checkmark$$

Ergebnis ist positiv $\checkmark$

Bei einer Approximation einer Gleichung, ersetzt man eine Funktion durch ihr Taylor-Polynom um die Gleichung lösbar zu machen.

Approximation: 4ter Ordnung:

$$\text{Gleichung: } \cos(x^2) = 2x^2$$

① Bedingungen

Taylorreihe: $\cos(x)$

4. Ordnung, $x_0 = 0$

$\therefore$

$$t_f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

② Standardreihe

S. 187 Papula

$\therefore$ Einsetzen in die Gleichung:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 2x^2$$

③ Einsetzen und in eine Gleichung umformen

$$\therefore 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 2x^2$$

$$\therefore 1 - 0.5x^2 + \frac{1}{24}x^4 = 2x^2 \quad | - 2x^2$$

$$\therefore \frac{1}{24}x^4 - 2.5x^2 + 1 = 0$$

Das ist eine Biquadratische Gleichung:

④ Biquadratische Gleichung

$$a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0$$

Lösungsverfahren: Substitution $u = x^2$

S. 20 Papula
Lösungsbeispiel

$$\therefore \frac{1}{24}u^2 - 2.5u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4 \cdot \frac{1}{24} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{24}}$$

$$u_1 = 59,59$$

$$u_2 = 0,402$$

$\therefore$ Rücksubstitution: $x^2 = u$

$$x^2 = u_1$$

$$x^2 = 59,59 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm \sqrt{59,59} \Rightarrow \pm 7,71$$

$$x^2 = u_2$$

$$x^2 = 0,402 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm \sqrt{0,402}$$

$$x = \pm 0,634$$

Lösungen:

⑤ Lösungen

$$x_1 = 7,71, x_2 = -7,71$$

$$x_3 = 0,634, x_4 = -0,634$$

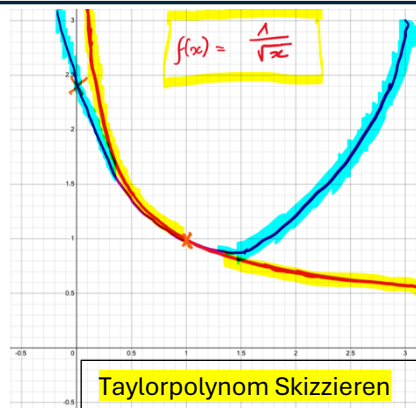
$\therefore$ Nur positive Lösungen:

$$[x_1 = 7,71] \text{ und } [x_3 = 0,634]$$

⑥ Auswertung

Einzig nahe Lösung ist x_3 , weil $0,634$ ist nah am Entwicklungszentrum!

Man nehme die Lösung, die am nächsten zum Entwicklungszentrum ist ($x_0 = \dots$)



1. Ankerpunkt:

x wählen sodass die Klammer 0 wird.

$\rightarrow$ Punkt skizzieren

2. Y-achsen Abschnitt:

$x = 0$ setzen um y Abschnitt zu finden.

3. Globalverhalten:

Term mit höchster Potenz auf Global Verhalten analysieren.

Für $+\infty$ und $-\infty$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4$$

1. Ankerpunkt:

$$x = 1$$

$$\therefore f(x) = 1 - \frac{1}{2}(1-1) + \frac{1}{8}(1-1)^2 - \frac{5}{16}(1-1)^3 + \frac{35}{128}(1-1)^4$$

$$\therefore f(x) = 1$$

2. Y-achsen abschnitt:

$$x = 0$$

$$\therefore f(0) = 1 - \frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{8}(0-1)^2 - \frac{5}{16}(0-1)^3 + \frac{35}{128}(0-1)^4$$

$$f(0) = \frac{35}{128} \approx 2,74$$

3. Globalverhalten:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4$$

Term mit höchster Potenz:

$$\therefore \frac{35}{128}(x-1)^4$$

$$\therefore \text{Potenz} = 4 \rightarrow \text{Gerade}$$

Start $\curvearrowright$ Ende

Entwicklung der Taylorreihe aus Vorhandener Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{1}{32}(x-1)^4$$

Formel für Taylorreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Das will ich finden

Verfahren Bildungsgesetz finden:

Bildungsgesetz der Form immer
universell bilden!

Fragen: 1. Was bleibt konstant?
2. Was ändert sich?

Standard Bausteine:

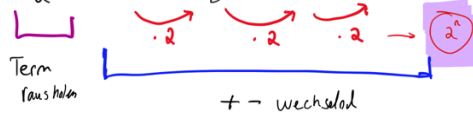
+,- wechsell. Reihe: $(-1)^n$

Gerade Reihe: $2 \cdot k$

Ungerade Reihe: $2 \cdot k - 1$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{1}{32}(x-1)^4$$

$$\text{Tester: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$$



$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n$$

Standard Bausteine einsetzen
dann trivial nach Lösung suchen.

→ Test: $n=0$

$$\frac{(-1)^0}{2^0} (x-1)^0$$

$$1 \cdot (x-1)^0 = 1 \neq \frac{1}{4}(x-1)^1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

→ Test: $n=0$

$$\frac{(-1)^0}{2^{0+1}} (x-1)^0$$

$$\frac{-1^0}{2^1} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}(x-1)^1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

→ Test: $n=0$

$$\therefore \frac{(-1)^{0+1}}{2^{0+1}} (x-1)^0$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)^0 \neq \frac{1}{4}(x-1)^1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

Man kann auch den Startpunkt
der Reihe anpassen! Es muss nicht: $n=0$

→ Test: $n=1$

$$= \frac{(-1)^{1+1}}{2^{1+1}} (x-1)^1$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)^1 = \frac{1}{4}(x-1)^1$$

→ Test: $n=2$

$$= \frac{(-1)^{2+1}}{2^{2+1}} (x-1)^2$$

$$= -\frac{1}{8}(x-1)^2 = -\frac{1}{8}(x-1)^2$$

Fertige Taylorreihe:

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

Nachdem Test schauen wir
man umformen kann um Lösung
zu erhalten.

Entwicklung der Taylorreihe durch Berechnung des Taylorpolynoms.

Von dem:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

zu

dem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Erster Durchgang:

① Ableitungen bilden

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

Erster Durchgang (n = 1):

Hier fällt die erste Hochzahl nach vorne, und die erste innere Ableitung kommt dazu.

$$f'(x) = \underbrace{(-1)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(1-2x)^{-2}}_{\text{Klammer}} \cdot \underbrace{(-2)}_{\text{innere}}$$

$$\therefore (1-2x)^{-1}$$

$$F(u) \approx u^{-1}$$

$$F'(u) \approx -1 \cdot u^{-2}$$

$$u(x) = 1-2x$$

$$u'(x) = -2$$

$$F'(u) \cdot u'(x) \Rightarrow -1 \cdot (1-2x)^{-2} \cdot -2$$

$$\Rightarrow \frac{1 \cdot -1 \cdot -2}{(1-2x)^2}$$

Achtung!! #

Die Zahlen werden übertragen

Zweiter Durchgang:

$$F(u) \approx 2u^{-2}$$

$$F'(u) \approx 2 \cdot 2u^{-3}$$

$$u(x) = 1-2x$$

$$u'(x) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{(1 \cdot -1 \cdot -2) \cdot (-2 \cdot -2)}{(1-2x)^3}$$

Zweiter Durchgang (n = 2):

Die neuen Faktoren hängen sich an die alten Ketten an.

$$f''(x) = \underbrace{(1 \cdot -1 \cdot -2)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(1-2x)^{-3}}_{\text{Klammer}} \cdot \underbrace{(-2 \cdot -2)}_{\text{innere}}$$

Dritter Durchgang (n = 3):

Das Muster setzt sich nahtlos fort.

$$f'''(x) = \underbrace{(1 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(1-2x)^{-4}}_{\text{Klammer}} \cdot \underbrace{(-2 \cdot -2 \cdot -2)}_{\text{innere}}$$

Dritter Durchgang:

$$F(u) \approx 8u^{-3}$$

$$F'(u) \approx -3 \cdot 8u^{-4}$$

$$u(x) = 1-2x$$

$$u'(x) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{(1 \cdot -1 \cdot -2) \cdot (-2 \cdot -2) \cdot (-3 \cdot -2)}{(1-2x)^4}$$

$$48(1-2x)^{-4}$$

=> Bildungsgesetz beweisen:

② Bildungsgesetz

Konstant: $-2 \cdot -2 \cdot -2$

Veränderung: $-1 \cdot -2 \cdot -3$

positive Ergebnisse

2, 8, 48

Klammer: $(1-2x)^{-1}, (1-2x)^{-2}, (1-2x)^{-3}, (1-2x)^{-4}$

Potenz: $-1, -2, -3, -4$

3! \cdot 2^3 => Allgemein: $n! \cdot 2^n (1-2x)^{-(n+1)}$

Formel Allgemein:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\therefore f^{(n)}(x_0) \Rightarrow n! \cdot 2^n \cdot (1-2x)^{-(n+1)}$$

Test für: $n-1$

$n=0$

$0-1 = -1$

$n=1$

$1-1 \neq 0$

Test für: $-(n+1)$

$n=0$

$\therefore -(0+1) = -1$

$n=1$

$\therefore -(1+1) = -2$

Zähler:

Zentrum einsetzen um Zahlenwert zu bestimmen:

$$\therefore f(0) = (1-0)^{-1} = 1$$

$$f'(0) = 2(1-0)^{-2} = 2$$

$$f''(0) = 8(1-0)^{-3} = 8$$

$$f'''(0) = 48(1-0)^{-4} = 48$$

Allgemein: $n! \cdot 2^n \cdot (1)^{-(n+1)}$

$\therefore n! \cdot 2^n \leftarrow$ Zähler

Vereinfachen

Nenner:

Durch $n!$ teilen:

$$n=0$$

$$\therefore \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n=1$$

$$\therefore \frac{2}{1!} = \frac{2}{1} = 2$$

$$n=2$$

$$\therefore \frac{8}{2!} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4$$

Allgemein: $\frac{n! \cdot 2^n}{n!}$

$\therefore 2^n \leftarrow$ Nenner

Reihe zusammensetzen:

④ Zusammensetzen

$\therefore$ Letzte Bräuskin: $(x - x_0)^n$

Da $x_0 = 0$

$$\therefore (x - 0)^n \Rightarrow x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

⑤ Ergebnis

Taylorpolynome standard reihen

Zusammen multiplizieren:

$$f(x) = e^x \cdot \sin(x), \quad x_0 = 0$$

S. 186 Papula Ord. = 3

$$\therefore \sin(x) = x^1 - \frac{x^3}{3!}$$

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot \left(x^1 - \frac{x^3}{3!}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{36}$$

$$\Rightarrow x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{36}x^6$$

Achtung nur Grad bis 3

Somit: $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$

Potenzzreihe als Geschlossenes System:

$$\left[1 + \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{3^2 \cdot x^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^3 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4^4 \cdot x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right]$$

1) Bausteine überprüfen:

Standard Bausteine:
 +, - wechsell. Reihe: $(-1)^n$
 Gerade Reihe: $2 \cdot k$
 Ungerade Reihe: $2 \cdot k - 1$
 → Treffen zu dann mir diesen Wert nehmen

2) Verhalten analysieren

1. Was bleibt konstant? → 3 · x
2. Was ändert sich? → Potenzen und Nenner

3) Bildungsgesetz formulieren

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$$

wo fragt die Reihe an?
 → n = 1

Nenner:
 → Fakultät: 1 · 2 · 3 · 4
 Zähler:
 → Bestandteile:
 ∴ 3 und x
 ∴ potenzen + 1

(3.1) Versuchen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$$

Für n=0: $\frac{3^0 \cdot x^0}{0!} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$

Für n=1: $\frac{3^1 \cdot x^1}{1!} = \frac{3 \cdot x}{1} = 3 \cdot x$

∴ $\frac{3 \cdot x}{1} \neq \frac{3 \cdot x}{2}$

Abzählen:

Ausklammern? → $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dots$

$$\therefore 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$$

$$\therefore 1 + \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} \neq 1 + \frac{3 \cdot x}{2}$$

Somit Potenzen umändern:

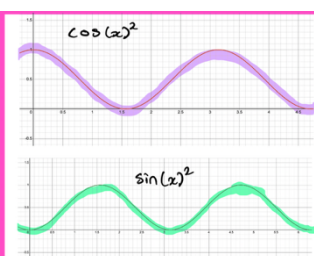
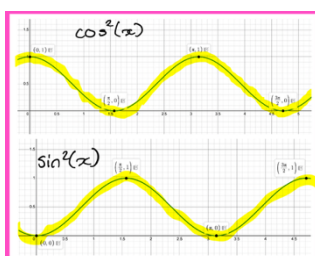
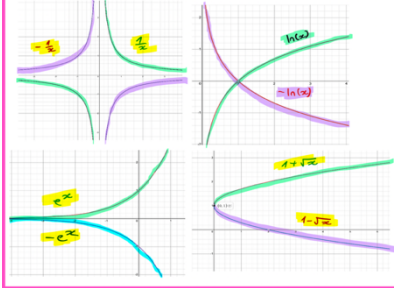
$$\therefore 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot x^{n-1}}{n!}$$

$$\therefore 1 + \frac{3^{2-1} \cdot x^{2-1}}{2!}$$

$$\therefore 1 + \frac{3 \cdot x}{2!} \checkmark$$

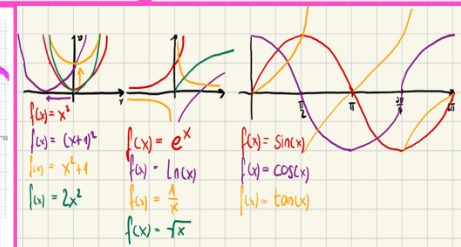
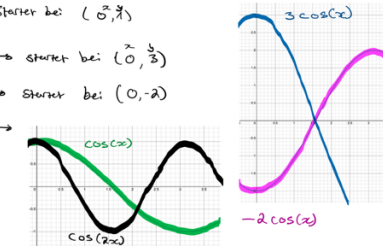
Somit: $\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot x^{n-1}}{n!}\right]$

Spiegelungen der Elementen f(x):



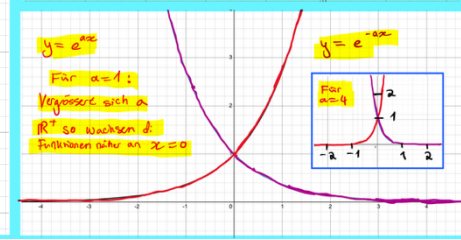
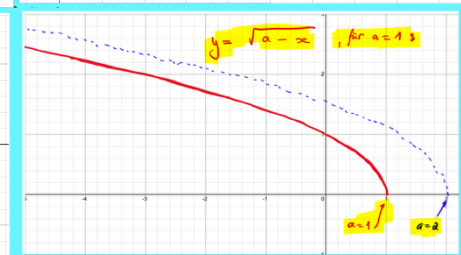
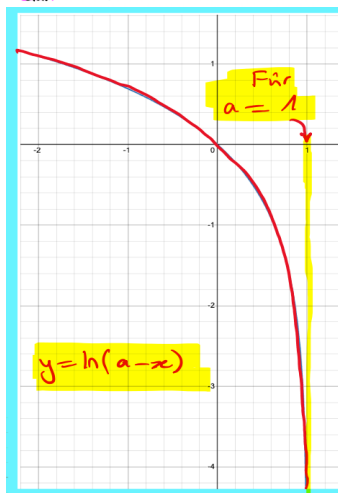
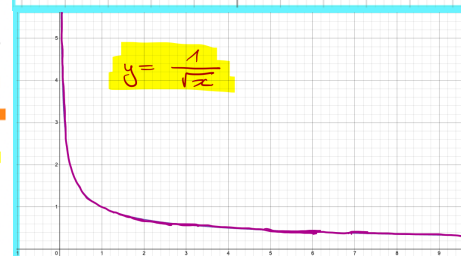
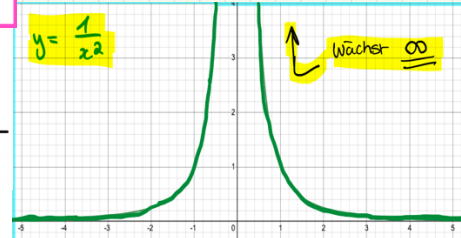
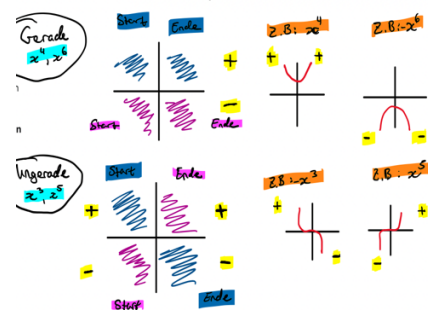
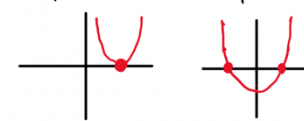
Cosinus: Starter bei (0, 1)

- 3 cos(x) → starter bei (0, 3)
- -2 cos(x) → starter bei (0, -2)
- cos(2x) →



Doppelt:

Einfach:



Anwendung Integral Rechnung

Mittelwert

1) Mittelwert $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$

$$y = \ln|x|$$

$$x = 1, x = 5$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{5-1} \cdot \int_1^5 \ln|x| dx$$

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot \left[x \cdot \ln|x| - x \right]_1^5$$

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot ((5 \cdot \ln|5| - 5) - (1 \cdot \ln(1) - 1))$$

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot ((3,047) - (-1))$$

$$\mu \approx 1,011$$

2. Sei ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$ gegeben. Bestimmen Sie $c \geq 0$ in Abhängigkeit von n , so dass der Mittelwert μ der Funktion

$$y = x^n$$

auf dem Intervall $[0, c]$ gleich 1 ist.

Mittelwert auf Intervall $[a, b]$ lautet:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{c-0} \int_0^c x^n dx$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{c} \int_0^c x^n dx$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right]_0^c$$

$$\therefore \frac{1}{c} \left(\left(\frac{1}{n+1} \cdot (c)^{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} \cdot (0)^{n+1} \right) \right)$$

$$\therefore \frac{1}{c} \left(\left(\frac{1}{n+1} \cdot (c)^{n+1} \right) \right)$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{c^{n+1}}{n+1}$$

$$\therefore \mu = \frac{c^{n+1}}{c(n+1)} \Rightarrow \frac{c^n}{n+1}$$

$$\therefore \mu = \frac{c^n}{(n+1)}$$

$$\therefore 1 = \frac{c^n}{(n+1)} \quad | \cdot (n+1)$$

$$\therefore c^n = (n+1) \quad | \sqrt[n]{}$$

$$\therefore c = \sqrt[n]{n+1}$$

Funktionsgleichung bestimmen: Parabel

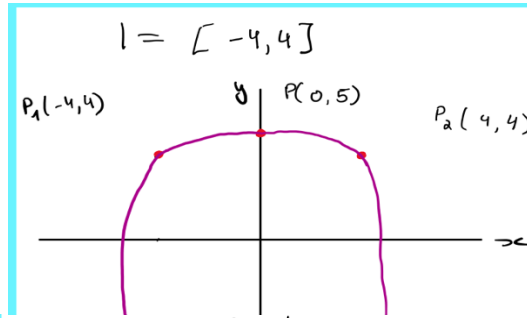
3. In Intervall $I = [-4, 4]$ wird die durch die drei Punkte

$$P_1 = (-4, 4), \quad P_2 = (0, 5), \quad P_3 = (4, 4)$$

definierte Parabel um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Fass.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel.

b) Berechnen Sie das Volumen des Fasses.



Allgemeine Form: Parabel

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. G.S.:

$$\text{Punkt 1} \Rightarrow (-4, 4)$$

$$\therefore a(-4)^2 + b(-4) + c = 4$$

$$\text{I} \quad 16a - 4b + c = 4$$

$$\text{Punkt 2} \Rightarrow (0, 5)$$

$$\therefore a(0)^2 + b(0) + c = 5$$

$$\text{II} \quad c = 5$$

$$\text{Punkt 3} \Rightarrow (4, 4)$$

$$\therefore a(4)^2 + b(4) + c = 4$$

$$\text{III} \quad 16a + 4b + c = 4$$

2. G.S. lösen:

$$\text{I: } 16a - 4b + 5 = 4 \quad | -5$$

$$16a - 4b = -1 \quad | -16a$$

$$-4b = -1 - 16a \quad | \div -4$$

$$b = \frac{1}{4} + 4a$$

III:

$$16a + 4\left(\frac{1}{4} + 4a\right) + 5 = 4$$

$$16a + 1 + 16a + 5 = 4$$

$$32a + 6 = 4 \quad | -6$$

$$32a = -2 \quad | \div 32$$

$$a = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore b = \frac{1}{4} + 4\left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$b = 0$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 5$$

Volumen (x-Achse)

b) $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{16}x^2 + 5\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left(\frac{1}{256}x^4 - \frac{5}{8}x^2 + 25\right) dx$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{256} \int_{-4}^4 x^4 dx - \frac{5}{8} \int_{-4}^4 x^2 dx + \int_{-4}^4 25 dx \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{256} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-4}^4 - \frac{5}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 + \left[25x \right]_{-4}^4 \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{256} \cdot \left(\frac{2048}{5} \right) - \frac{5}{8} \left(\frac{128}{3} \right) + 200 \right)$$

$$V = 549,56 \checkmark$$

Achtung Binom check

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{16}x^2 + 5\right)^2 \\ & \left(-\frac{1}{16}x^2 + 5\right) \left(-\frac{1}{16}x^2 + 5\right) \\ & \frac{1}{256}x^4 - \frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{16}x^2 + 25 \\ & \frac{1}{256}x^4 - \frac{5}{8}x^2 + 25 \end{aligned}$$

Einheit mit TR

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

$$F = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Mantelfläche

Rotationsachse

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad y = f(x) \quad x\text{-Achse}$$

$$F = 2\pi \int_a^b g(y) \sqrt{1 + g'^2(y)} dy \quad x = g(y) \quad y\text{-Achse}$$

Volumen

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad x\text{-Achse}$$

$$V = \pi \int_a^b g^2(y) dy = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad y\text{-Achse}$$

Für Mantelfläche:

x-Achse: Normaler Weg. Funktion bleibt $y = f(x)$, Grenzen sind auf der x-Achse,

Integration nach dx .

y-Achse: Umstell-Weg. Funktion muss zu $x = g(y)$ umgebaut werden, Grenzen sind auf der y-Achse, Integration nach dy .

Mantelfläche

Rotationsachse

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad y = f(x) \quad x\text{-Achse}$$

$$F = 2\pi \int_a^b g(y) \sqrt{1 + g'^2(y)} dy \quad x = g(y) \quad y\text{-Achse}$$

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Ist der Term unter der Wurzel ein Bruch, so nutzt man den Trick, um zu vereinfachen.

$$\sqrt{1 + \frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \checkmark$$

$$\sqrt{1 + 2x} \Rightarrow \text{X}$$

Schwerpunkt einer Fläche

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f^2(x) dx$$

Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers

$$x_s = \frac{\pi}{V_s} \int_a^b x f^2(x) dx \quad y_s = 0 \quad \text{Rotationsachse}$$

$$x_s = 0 \quad y_s = \frac{\pi}{V_s} \int_c^d y g^2(y) dy \quad y\text{-Achse}$$

Entscheidungsbaum: Schwerpunkt

Gegeben: Eine Funktion (Ex. $y = x^2$)

$$\text{Nutzen: } x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f^2(x) dx$$

Gegeben: 2 Funktionen (Ex. $y = x^2$ und $y = x^2 + 1$)

$$\text{Nutzen: } x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

5. Die Kurve der Funktion

$y = e^{-x}$
wird zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = c$ um die x -Achse rotiert (wobei $c > 0$). Dadurch entsteht ein Rotationskörper. Sei V das Volumen dieses Rotationskörpers. Wie gross muss die obere Grenze c gewählt werden, damit $V = 1$ gilt?

5) $y = e^{-x}$ | $V = 1$
 $x = 0, x = c$

$$V = \pi \int_0^c (e^{-x})^2 dx$$
$$V = \pi \cdot \int_0^c e^{-2x} dx$$
$$V = \pi \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^c$$
$$V = \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2c} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2(0)} \right) \right)$$
$$V = \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2c} + \frac{1}{2} \right)$$
$$1 = -\frac{\pi}{2} e^{-2c} + \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore -\frac{\pi}{2} e^{-2c} = 1 - \frac{\pi}{2} \quad | \cdot -\frac{2}{\pi}$$
$$e^{-2c} = \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}$$
$$e^{-2c} = -\frac{2}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2} \right)$$
$$e^{-2c} = -\frac{2}{\pi} + 1$$

Regel: $\log_a(a^x) = x$

$$\therefore \ln(e^{-2c}) = \ln\left(-\frac{2}{\pi} + 1\right)$$
$$-2c = \ln\left(-\frac{2}{\pi} + 1\right) \quad | : -2$$
$$c = \frac{\ln\left(-\frac{2}{\pi} + 1\right)}{-2}$$
$$c = 0.506$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve, welche gegeben ist durch:

a) $6xy = x^4 + 3$ von $x = 1$ bis $x = 2$ (Resultat: $\frac{17}{12}$).

$6xy = x^4 + 3 \quad | + 6x$ Länge der Kurve, Bogenlänge,
 $y = \frac{x^4 + 3}{6x}$ Länge des Graphen, Weglänge,
Rektifikation der Kurve

$$y = \frac{x^4}{6x} + \frac{3}{6x}$$
$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{6x}$$
$$y = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^{-1}$$
$$y'(x) = \frac{3}{6} x^2 - \frac{1}{2} x^{-2}$$
$$y'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$
$$y'(x) = \frac{x^4}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^4 - 1}{2x^2}$$

Quadratsumme: $\left(\frac{x^4 - 1}{2x^2}\right)^2$

$$\therefore \frac{(x^4 - 1)^2}{(2x^2)^2} = \frac{x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4}$$

+1: $1 = \frac{4x^4}{4x^4}$

$$\therefore \frac{4x^4}{4x^4} + \frac{x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4}$$
$$\therefore \frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}$$

Schema +1 bei Brücken

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Wurzel: $\sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}}$ Binom: $x^2 + 2x^4 + 1$

$$\therefore \sqrt{\frac{(x^4 + 1)^2}{4x^4}}$$
$$\therefore \frac{x^4 + 1}{2x^2}$$
$$S = \int_1^2 \frac{x^4 + 1}{2x^2} dx$$
$$\therefore \int_1^2 \frac{x^4}{2x^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{2x^2} dx$$
$$\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x^{-2} dx$$
$$\frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^{-2} dx$$
$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{17}{12}$$

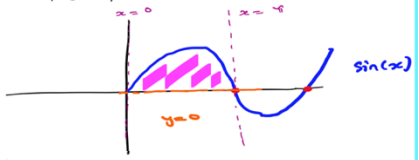
Geben Sie die Koordinaten des Flächenschwerpunktes an für die Fläche, die gegeben ist durch:

a) $y = \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$ und $x = \pi$ (Resultat: $x_s = \frac{\pi}{2}$, $y_s = \frac{\pi}{8}$).

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x (y_o - y_u) dx$$
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2) dx$$

y_o = obere Randkurve
 y_u = untere Randkurve

$y = \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$ und $x = \pi$


$$\int_0^\pi \sin(x) = [-\cos(x)]_0^\pi$$
$$= ((-\cos(\pi)) - (-\cos(0)))$$
$$= 2$$
$$A = 2$$
$$x_s = \frac{1}{2} \int_0^\pi x (\sin(x) - 0) dx$$
$$x_s = \frac{1}{2} \int_0^\pi x (\sin(x)) dx$$

$u(x) = x$ $v'(x) = \sin(x)$
 $u'(x) = 1$ $v(x) = -\cos(x)$

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$
$$x \cdot -\cos(x) - \int 1 \cdot -\cos(x) dx$$
$$-x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) dx$$
$$-x \cdot \cos(x) + [\sin(x)]$$
$$\frac{1}{2} [-x \cdot \cos(x) + \sin(x)]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2} \pi - 0$$
$$= \frac{1}{2} \pi \rightarrow x_s = \frac{1}{2} \pi$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^k \cdot (k+1)} \cdot x^k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot (k+1)}$$

$$\text{AK: } a_k = \frac{x^k}{7^k \cdot (k+1)}$$

$$a_{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{7^{(k+1)} \cdot ((k+1)+1)}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\frac{x^{(k+1)}}{7^{(k+1)} \cdot ((k+1)+1)}}{\frac{x^k}{7^k \cdot (k+1)}} \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{7^k (k+1)}{x^k} \cdot \frac{x^{(k+1)}}{7^{(k+1)} \cdot ((k+1)+1)} \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{7^k (k+1) \cdot x^{(k+1)}}{x^k \cdot 7^{(k+1)} \cdot (k+2)} \right| < 1$$

$$\left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \cdot \frac{7^k}{7^{(k+1)}} \cdot \frac{(k+1)}{(k+2)} \right| < 1$$

$$x^{k+1-k} = x^1$$

$$7^k - k - (k+1) = 7^{-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| x^1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{(k+1)}{(k+2)} \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{x}{7} \right| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k+2} \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{x}{7} \right| \cdot |1|$$

Lösung nach Entwicklung
definition:

$$= \left| \frac{x}{7} \right| < 1$$

(x - x_0)
(x - 0)

Ungleichung lösen auf x:

$$\left| \frac{x}{7} \right| < 1 \quad | \cdot |7|$$

$$\therefore |x| < 7$$

$$\text{Somit } \varphi = \underline{\underline{7}}$$

Ungleichung Lösung allgemein:

x muss alleine stehen → Schema: (x - x_0)

z.B.

$$\left| \frac{x}{7} \right| < 1 \neq (x - x_0)$$

→ Es muss weiter umgestellt werden

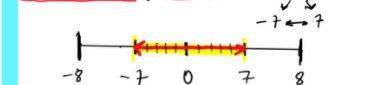
$$\underline{\underline{|x| < 7}} = (x - x_0), \text{ wobei } x_0 = \underline{\underline{0}}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius:

Gesucht ist die Distanz, in diesem

$$\text{Fall: } \boxed{\varphi = 7}$$

Der Konvergenzradius ist die Distanz
zwischen der Grenze:



Bestimmen Sie den Konvergenzbereich:

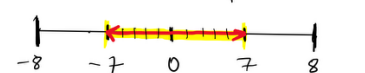
Gesucht ist wo Konvergenz existiert.

→ Wo die Reihe konvergiert.

$$\boxed{-7 < x < 7}$$

Konvergenzbereich

Zahlen zwischen oder
auch mit Randpunkten



Ungleichung Lösung allgemein:

x muss alleine stehen → Schema: (x - x_0)

z.B.

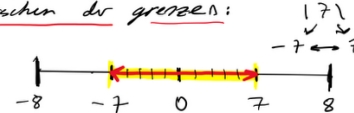
$$(x-1) < \frac{3}{2} = (x - x_0), \text{ wobei } x_0 = -1$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius:

Gesucht ist die Distanz, in diesem

$$\text{Fall: } \boxed{\varphi = \frac{3}{2}}$$

Der Konvergenzradius ist die Distanz
zwischen der Grenze:



Bestimmen Sie den Konvergenzbereich:

Gesucht ist wo Konvergenz existiert.

→ Wo die Reihe konvergiert.

$$\boxed{-1.5 < x-1 < 1.5} \quad | +1 \quad \text{Beispiel}$$

$$\boxed{-0.5 < x < 2.5}$$

Konvergenzbereich

Zahlen zwischen oder
auch mit Randpunkten



$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k}{3^k} (x-1)^k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k \cdot (x-1)^k}{3^k}$$

$$\text{AK: } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

$$a_k = \frac{k \cdot 2^k \cdot (x-1)^k}{3^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1) \cdot 2^{(k+1)} \cdot (x-1)^{(k+1)}}{3^{(k+1)}}$$

$$\therefore \left| \frac{\frac{(k+1) \cdot 2^{(k+1)} \cdot (x-1)^{(k+1)}}{3^{(k+1)}}}{\frac{k \cdot 2^k \cdot (x-1)^k}{3^k}} \right|$$

$$\therefore \left| \frac{3^k}{k \cdot 2^k (x-1)^k} \cdot \frac{(k+1) \cdot 2^{(k+1)} \cdot (x-1)^{(k+1)}}{3^{(k+1)}} \right|$$

$$\therefore \left| \frac{3^k \cdot (k+1) \cdot 2^{(k+1)} \cdot (x-1)^{(k+1)}}{k \cdot 2^k \cdot (x-1)^k \cdot 3^{(k+1)}} \right|$$

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\therefore 3^{k-(k+1)} = 3^{-1}$$

$$\therefore (x-1)^{(k+1)-k} = (x-1)^1$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{3} \cdot (x-1) \cdot \frac{(k+1)}{k} \cdot 2 \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{2(x-1)}{3} \right| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)}{k} \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{2(x-1)}{3} \right| \cdot |1| < 1$$

$$\therefore \left| \left(\frac{2}{3} \cdot (x-1) \right) \right| < 1 \quad | : \frac{2}{3}$$

$$\therefore |x-1| < \left[\frac{3}{2} \right] \quad \text{Konvergenzradius} \quad (x - x_0)$$

$$\therefore r = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Konvergenzintervall:

$$-1.5 < x-1 < 1.5 \quad | +1$$

$$-0.5 < x < 2.5$$

Für dieses Intervall ist die Reihe
garantiert konvergent.

Lösung nach Entwicklung
definition:

Gesucht: Beweisen Sie $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ mittels Integralrechnung.

S. 116 Papula:

Mittelpunkts-Gleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \leftarrow \text{Mittelpunkt des Kreises im Ursprung}$$

① Integrierbare Funktion aufstellen:

Nach y lösen

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \sqrt{}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

② Formel für Bogenlänge:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Um die Aufgabe zu vereinfachen berechnen wir nur 0,25 vom Kreis.

③ Ableitung bilden:

$$y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(u) = u^{\frac{1}{2}}, \quad F'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(x) = r^2 - x^2, \quad u'(x) = -2x$$

$$\therefore \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot -2x$$

$$\therefore \frac{-2x}{2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

④ Quadrieren:

$$\left(\frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{((r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$= \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

⑤ In Formel einsetzen:

$$L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

Achtung! 1 muss umgewandelt werden damit es funktioniert!

$$\frac{1}{1} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\therefore L = \int_0^r \left(\frac{r^2}{r^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$L = \int_0^r \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

⑥ Integrieren:

$$L = r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

Integraltafel: S. 992

$\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$

$$\therefore \left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_0^r$$

$$= r \cdot \left(\arcsin\left(\frac{r}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{r}\right) \right)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \pi$$

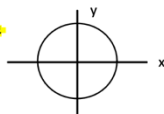
Somit $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r$ für 0,25 des Kreises

Für den vollen Kreis: $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \right)$

$$= 2\pi r$$

Beweisen einer Formel von einem Geometrischen Objekt:

Kreis:



Gesucht: Beweisen Sie $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ mittels Integralrechnung.

S. 116 Papula:

Mittelpunkts-Gleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \leftarrow \text{Mittelpunkt des Kreises im Ursprung}$$

① Integrierbare Funktion aufstellen:

Nach y lösen

② Formel für Bogenlänge:

③ Ableiten bilden:

④ Quadrieren:

⑤ In Formel einsetzen:

⑥ Integrieren & Hauptsatz:

⑦ Fertig

Bei Erweitern eines Bruches:

$$1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Bei Umformung einer Gleichung:

$$x = 5$$

$$\therefore \frac{2}{x} = 5 \cdot 2$$

$$2x = 10$$

Gesucht: Beweisen Sie $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ mittels Integralrechnung

Somit Formel:

Mittelpunkts-Gleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \leftarrow \text{Mittelpunkt des Kreises im Ursprung}$$

$$\therefore y^2 = r^2 - x^2 \quad \sqrt{}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

② Formel: Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\text{Ableitung von } y: y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{KK} y'$$

$$F(u) = u^{\frac{1}{2}}, \quad u(x) = r^2 - x^2$$

$$F'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}, \quad u'(x) = -2x$$

$$F'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot -2x$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2} dx$$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}$$

$$\therefore \text{GN: } \frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\therefore \text{GN: } \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \frac{r \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r r dx$$

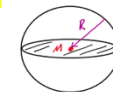
$$\therefore M_x = 2 \cdot \pi \cdot \left[rx \right]_{-r}^r$$

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r^2$$

$$M_x = 4 \pi r^2$$

Beweisen einer Formel von einem Geometrischen Objekt:

Kugel:



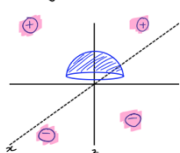
Gesucht: Beweisen Sie $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ mittels Integralrechnung

S. 37 Papula:

$$0 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

ist ein Buchstabe "0"

① Integrierbare Funktion aufstellen:



Mittelpunkt des Kreises ist im Ursprung, somit Formel S.116 gültig.

② Formel: Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

③ Quadrieren

④ Auf GN bringen

⑤ Integrieren

⑥ Hauptsatz

⑦ Fertig

*** START: Aufgabe enthält Kreis/Kugel & Integralrechnung

Schritt 1: Das Fundament gießen (Gilt IMMER)

- Kreisgleichung notieren: $x^2 + y^2 = r^2$
- Randkurve (y) isolieren: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Schritt 2: WAS ist gesucht? (Wähle deinen Pfad)

- PFAD A: Flächenschwerpunkt (x_s / y_s)
 - 1 Symmetrie-Check: Ist die Form symmetrisch? (z.B. Viertelkreis $\rightarrow x_s = y_s$). Rechne nur einen Wert!
 - 2 Fläche berechnen: A bestimmen (z.B. $\frac{1}{4} \pi r^2$).
 - 3 Integral aufstellen: $x_s = \frac{1}{A} \int x \cdot f(x) dx$
 - 4 Achtung: Hier brauchst du keine Ableitung!
- PFAD B: Bogenlänge / Umfang (L / U)
 - 1 Symmetrie-Check: Nutze Grenzen von 0 bis r (Viertelkreis) und multipliziere am Ende mit 4.
 - 2 Ableiten: Bilde $f'(x)$ aus deiner Randkurve. (Das ist der wichtigste Zwischenschritt hier!)
 - 3 Integral aufstellen: $L = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- PFAD C: Mantelfläche / Oberfläche (M_x / O)
 - 1 Symmetrie-Check: Nutze Grenzen von 0 bis r (Halbkugel) und multipliziere am Ende mit 2.
 - 2 Ableiten: Bilde $f'(x)$ aus deiner Randkurve.
 - 3 Integral aufstellen: $M_x = 2 \pi \int f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Schritt 3: Das Finale (Integration & Kontrolle)

- Variablen-Check: Rechtest du mit Buchstaben (wie r) oder mit Zahlen (wie 5)?
 - Bei Zahlen: Direkt in den Taschenrechner eintippen!
 - Bei Buchstaben: Händisch integrieren (Stammfunktion suchen $\rightarrow$ Grenzen einsetzen).

Grenzwerte: Regel L'Hopital

3.4 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Für Grenzwerte, die auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt die sog. *Bernoulli-de l'Hospital'sche Regel*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Voraussetzung: $f(x)$ und $g(x)$ sind in einer Umgebung von x_0 stetig differenzierbar und der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

2 einsetzen:

$$\therefore \frac{0}{0} \rightarrow \text{Hopital}$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x - 6$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 4$$

$$\therefore g'(x) = 2x$$

$$\therefore \frac{2x+1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{2(2)+1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(2x)}{x - \sin(2x)}$$

$$f(x) = x + \sin(2x) \rightarrow KR$$

$$g(x) = x - \sin(2x) \rightarrow KR$$

$$\therefore f(x) = x + \sin(2x)$$

$$\therefore f'(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$f'(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$\therefore \cos(2x) \cdot 2$$

$$\therefore 2 \cos(2x)$$

$$\therefore f'(x) = 1 + 2 \cos(2x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos(2x)}{1 - 2 \cos(2x)}$$

$$\therefore \frac{1 + 2 \cos(2(0))}{1 - 2 \cos(2(0))}$$

$$\therefore \frac{-3}{5}$$

$$g(x) = x - \sin(2x)$$

$$\therefore f'(x) = -\cos(2x)$$

$$f'(x) = -\cos(2x)$$

$$\therefore -\cos(2x) \cdot d$$

$$\therefore -2 \cos(2x)$$

$$\therefore g'(x) = 1 - 2 \cos(2x)$$

Gebrochenrationale Funktion:

Allgemein:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Wenn: Zähler $(p(x))$ wird null

$$\text{z.B. } f(x) = \frac{0}{2 \log}$$

$$\text{z.B. } f(x) = \frac{0}{1} \Rightarrow 0$$

$\therefore$ Nullstelle

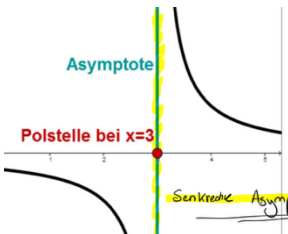
$\rightarrow$ Funktion schneidet x -Achse.

Wenn: Nenner $(q(x))$ wird null

$$\text{z.B. } f(x) = \frac{p(x)}{0}$$

$$\text{z.B. } f(x) = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{nicht definiert}$$

$\therefore$ Die Funktion ist hier nicht definiert. Polstelle



Asymptote:

Linie an die sich der Graph anschmiegt im ∞

Senkrechte Asymptote

Horizontale Asymptote



Polstelle:

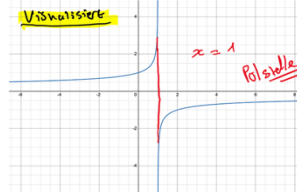
Nenner wird Null

$$\text{Beispiel: } f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Für $x = 1$

$$\therefore \frac{1}{0} \leftarrow \text{Polstelle}$$

Visualisiert



Polstelle:

An der x -Achse wo die Funktion ∞ oder $-\infty$ wächst.

Eine Polstelle entsteht wenn in einem Bruch der Nenner null wird und der Zähler nicht null ist.

$$\Rightarrow \frac{1}{0}$$

Unendliches Integral:

Erste und zweite Art

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

1. Grenzen überprüfen:

Gibt es $\pm \infty$?

Gibt es eine Polstelle?

Polstelle: $\frac{1}{0}$

Ja / Nein → 2

Ersetze die Grenze mit einer Variabel (λ , b , etc)

∴ Umschreiben des Integrals in Form:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \text{Grenze}} \int_0^{\lambda} f(x) dx$$

2. Stammfunktion bilden:

Wenn Ja bei 1

Wenn Nein bei 1

Der Limes wird hierbei ignoriert!

Mit passender Integrationsmethode integrieren.

Bei Substitution, Grenzen:

$$\int_a^{\lambda} f(x) dx \Rightarrow \begin{matrix} \text{neu oben} = \text{bei } u(x), \text{ für } x \\ \text{variabel einsetzen} \\ \text{neu unten} = \text{bei } u(x), \text{ für } x \\ \text{zahl einsetzen} \end{matrix}$$

Wenn Substitution gebraucht ist → Grenzen selbst nicht vergessen.

3. Grenzen einsetzen:

Die neuen Grenzen in die Stammfunktion einsetzen und auflösen.

$$[F(x)]_{\text{neu unten}}^{\text{neu oben}} + C$$

Nur wenn Ja in 1 dann 4 ↓

4. Den Grenzwert auswerten:

$\lim_{\lambda \rightarrow \dots}$ Ergebnis

Wenn Konkrete Zahl → Integral konvergiert (Fläche ist berechenbar)

Wenn gegen $\pm \infty$ → Integral divergiert (Fläche zu groß)

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$$

$$-\infty = \lambda$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_{\lambda}^0 e^{2x} dx$$

$$2x \rightarrow u$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{1}{2} du$$

Grenzen:

$$\text{Oben} = 2x \rightarrow 2(0) = 0$$

$$\text{unten} = 2(x) \rightarrow 2(\lambda) = 2\lambda$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_{\lambda}^0 e^u \frac{1}{2} du$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{2\lambda}^0 e^u du$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} [e^u]_{2\lambda}^0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^0 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{2\lambda} \right)$$

$$\Rightarrow \left(1 \cdot \frac{1}{2} \right) - (0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Konvergiert gegen $\frac{1}{2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

Polstelle für $x=2$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} \int_1^{\lambda} (x-2)^{-2} dx$$

$$\left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right]_1^{\lambda}$$

$$\therefore \left(\left(\frac{\lambda-2}{-1} \right)^{-1} \right) - \left(\frac{1-2}{-1} \right)^{-1} \Rightarrow \left(\left(\frac{\lambda-2}{-1} \right)^{-1} \right) - 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} \left(\left(\frac{\lambda-2}{-1} \right)^{-1} \right) - 1$$

$$= \infty$$

Divergiert gegen ∞

Der DGL-Scan: Dein Entscheidungsbaum für die Klausur

Schritt 1: Der Variablen-Check (Was ist die Basis?)

- Schau dir an, nach was abgeleitet wird.
- Gibt es nur eine unabhängige Variable (meistens x oder t)? → **Gewöhnliche DGL**
- Gibt es mehrere unabhängige Variablen (z.B. u wird nach x und nach t abgeleitet)? → **Partielle DGL**

Schritt 2: Der Ordnungs-Check (Wer ist der Boss?)

- Scanne die gesamte Gleichung nach der Ableitung mit den meisten Strichen (y' , y'' , y''') oder der höchsten Ziffer ($y^{(4)}$).
- Die gefundene Zahl ist direkt deine Ordnung (z.B. DGL 2. Ordnung).

Schritt 3: Der Linearitäts-Check (Die gefährlichste Falle!)

- Untersuche das y und alle seine Ableitungen (y' , y'' , etc.) unter der Lupe. Das x darf machen, was es will, aber für y gelten drei eiserne Verbote:
 - Keine Hochzahlen (kein y^2 , kein $(y')^3$).
 - Keine Fremdfunktionen (kein $\sin(y)$, kein $e^{y'}$, keine Wurzel $\sqrt{y}$).
 - Keine Produkte untereinander (kein $y \cdot y'$).
- Sind alle y -Terme völlig "nackt" (hoch 1) und durch Plus/Minus getrennt? → **Lineare DGL**
- Wurde auch nur eine Regel gebrochen? → **Nichtlineare DGL**

Schritt 4: Der Darstellungs-Check (Wer steht alleine?)

- Nimm die höchste Ableitung aus Schritt 2 in den Blick.
- Steht dieser "Boss" komplett isoliert und alleine auf einer Seite der Gleichung (z.B. $y'' = \dots$)? → **Explizite Darstellung** (Deine Notiz: Bevorzugt!)
- Steht die Gleichung stattdessen auf 0 = ... umgestellt oder ist die höchste Ableitung mit anderen Termen vermischt? → **Implizite Darstellung**

Schritt 5: Der Problem-Check (Das Drumherum)

- Gibt es neben der Gleichung noch zusätzliche Startwerte?
- Beziehen sich alle Startwerte auf exakt denselben x -Wert (z.B. $y(0) = 1$ und $y'(0) = 5$)? → **Anfangswertproblem (AWP)**
- Werden Werte an verschiedenen x -Werten vorgegeben (z.B. linker Rand $y(0) = 1$ und rechter Rand $y(L) = 0$)? → **Randwertproblem (RWP)**

Anhand Lösung, DGL identifizieren:

① DGL Eigenschaft identifizieren

z.B. Gegebene DGL: $y'' + 2y' + y = 0$

→ 2te Ordnung
→ Gewöhnliche DGL
→ Lineare DGL

② Ableitungen (je nach Ordnung) der Punkte bilden:

z.B. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, ...

③ Ableitungen der Punkte einzeln in die DGL einsetzen:

z.B. $y_1 = e^x$ $\left\{ \begin{array}{l} y' = e^x \\ y'' = e^x \end{array} \right.$ (2te Ordnung)

④ Identifizieren ob die Gleichung aufgeht

z.B. $y'' + 2y' + y = 0$

$\therefore e^x + 2(e^x) + e^x = 0$

$4e^x \neq 0$ weglich

DGL-Typ	Bedingung	Lösungsansatz
Autonome DGL	$y' = f(y)$	Trennung der Variablen
Separierbare DGL	$y' = f(x) \cdot g(y)$	Trennung der Variablen
Lineare (homogen)	$y' + f(x)y = 0$	Trennung der Variablen
Lineare (inhomogen)	$y' + f(x)y = g(x)$	Variation der Konstanten

① Separierbare DGL:

- Die Gleichung: $y' = f(x) \cdot g(y)$
- Erkennungsmerkmal: Du hast x -Terme und y -Terme, aber sie sind als sauberes Produkt getrennt (z.B. $y' = x^2 \cdot y$).
- Lösungsansatz: Trennung der Variablen (alles mit y nach links, alles mit x nach rechts).

② Autonome DGL (Der Spezialfall):

- Die Gleichung: $y' = g(y)$
- Erkennungsmerkmal: Wie in deiner Notiz so treffend steht: "es kommt nur y vor". Das x ist komplett aus der Gleichung verschwunden (mathematisch ist $f(x) = 1$). Ein Beispiel: $y' = y(1 - y)$.
- Lösungsansatz: Genau wie bei der separierbaren DGL nutzt du hier die Trennung der Variablen! Du bringst einfach das gesamte $g(y)$ mit Geteilte auf die linke Seite zum dy und integrierst rechts einfach nur dx .

③ Lineare DGL, homogen:

- Die Gleichung: $y' + y \cdot f(x) = 0$
- Erkennungsmerkmal: Die rechte Seite der Gleichung ist exakt Null. Es gibt keine Störfunktion.
- Lösungsansatz: Laut der Flohr-Tabelle nutzt man hier die Trennung der Variablen. (Warum? Weil du $y \cdot f(x)$ einfach mit Minus nach rechts bringen kannst zu $y' = -f(x) \cdot y$. Und zack, hast du wieder ein sauberes Produkt wie oben!)

④ Lineare DGL, inhomogen:

- Die Gleichung: $y' + y \cdot f(x) = g(x)$
- Erkennungsmerkmal: Die rote Notiz in deinem Bild sagt es perfekt: "inhomogen heißt: rechte Seite ungleich Null". Da steht also ein Term $g(x)$, in dem kein y vorkommt (z.B. e^{2x} wie in deiner Aufgabe vorhin).
- Lösungsansatz: Hier greift die Trennung der Variablen nicht mehr. Die Tabelle empfiehlt die Variation der Konstanten. (Hinweis: Die große Lösungsformel deines Professors $y = e^{-F(x)} \dots$ ist exakt das Resultat dieser Methode! Du rechest also genau richtig).

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 1 - y$$

- Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems zum Anfangswert $y(0) = 2$, und bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ für diese spezielle Lösung.

Allgemeine Lösung und spezielle Lösung:

$$y' = 1 - y \quad 1. \text{ Ord. , linear}$$

Standardform:
umstellen:

$$y' + y = 1 \quad \text{linear inhomogen.} \rightarrow \text{Variation der Konstanten}$$

$$\therefore \text{Formel: } y(x) = \left[\int g(x) \cdot e^{\int f(x)} dx \right] \cdot e^{-\int f(x)}$$

$$\therefore f(x) = 1$$

$$\therefore g(x) = 1$$

$$\therefore y(x) = (e^x + C) \cdot e^{-x}$$

$$\therefore y(x) = 1 + C \cdot e^{-x}$$

Spezielle Lösung für $y(0) = 2$:

$$2 = 1 + C \cdot e^{-0}$$

$$\therefore 2 = 1 + C \quad 1 - 1$$

$$C = 1$$

Somit spezielle Lösung:

$$y = 1 + 1 \cdot e^{-x}$$

$$\therefore y = 1 + e^{-x}$$

$$\text{Für } y = 1 + e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + e^{-x}$$

$$\therefore 1 + e^{-100} = 1$$

$$\text{Somit } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x})$$

$$= 1$$

Verfahren Allgemeine Lösung: Variation der Konstanten

① Bedingung: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$$\textcircled{2} \text{ Formel: } y(x) = \left[\int g(x) \cdot e^{\int f(x)} dx \right] \cdot e^{-\int f(x)}$$

③ Auflösen

④ Allgemeine Lösung der Form:

$$y(x) = \dots + C$$

Verfahren Allgemeine Lösung: Trennung der Variablen

① Bedingung: $y' = f(x) \cdot g(x)$

② y' umschreiben zu: $\frac{dy}{dx}$

③ Beide Seiten umformen zur Form:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx$$

④ Integration durchführen

⑤ Integriertes auf y umformen:

$$y = \dots + C$$

⑥ Allgemeine Lösung der Form:

$$y = \dots + C$$

Verfahren: Spezielle Lösung (AWP)

Gilt für alle DGL's in AWP

① Bedingung: $y(0) = y_0$

② Allgemeine Lösung:

$$\text{Von: } y = \dots + C$$

$$\text{Zu: } (y_0) = \dots + C \quad \left| \text{ und } x=0 \text{ in diesen Fall!} \right.$$

③ Nach C auflösen

$$C = \text{etwas}$$

④ Spezielle Lösung:

$$\rightarrow \text{Allgemeine Lösung: } y = \dots + C$$

$$y = \dots + (\text{etwas})$$

Verfahren: DGL aus Allgemeiner Lösung finden

8. Finden Sie eine Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$y = C \cdot x^2 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Die gesuchte DGL soll sowohl y als auch y' enthalten.

① Ableiten (so viele ableiten wie es C gibt)

② Gleichungssystem aufstellen:

$$\text{I } y = \dots$$

$$\text{II } y' = \dots$$

③ Einer der Gleichung auf C lösen:

$$C = \dots$$

④ In die andere Gleichung einsetzen und auflösen:

$$\text{Form: } y' = y \cdot \dots$$

7. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x - y + 1$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\text{a) } y(0) = 3$$

$$\begin{cases} y' = x - y + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases} \leftarrow \text{linear}$$

$$\begin{cases} y' + y = x + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung

$$\Rightarrow y(x) = \left[\int (x+1) \cdot e^x dx \right] \cdot e^{-x}$$

$$\left[\int x e^x + e^x dx \right] \cdot e^{-x}$$

$$\therefore [(x-1) \cdot e^x + e^x + C] \cdot e^{-x}$$

$$\therefore [x \cdot e^x - e^x + e^x + C] \cdot e^{-x}$$

$$\therefore [x \cdot e^x + C] \cdot e^{-x}$$

$$\therefore x \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x}$$

$$\therefore x + C e^{-x}$$

$$\therefore y = x + C \cdot e^{-x} \quad \text{in Allgemeine Lösung}$$

Spezielle Lösung $y(0) = 3$

$$3 = (0) + C \cdot e^{-0}$$

$$C = 3$$

$$\text{Somit: } y(x) = x + 3e^{-x} \quad \text{spezielle Lösung}$$

Funktion: $y' = y^2 - 1$

Gesucht: Konstante Lösung

① $y' = 0$ setzen

$\therefore y' = y^2 - 1$

$\therefore 0 = y^2 - 1$

② Umstellen

$\therefore 0 = y^2 - 1$

$\therefore y^2 = 1$

Lösungen: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$

Sekunden-check

Instabil

Sekunden-check

Stabil

③ Konditionen Skizzieren:

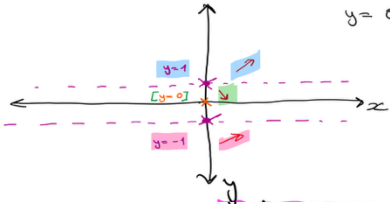
Test Zwischenraum:

$y = 0 : y' = y^2 - 1$

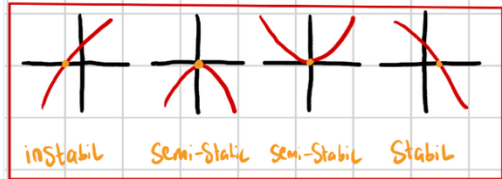
$y' = 0^2 - 1$

$y' = -1$

Stabil



Sekunden-check: Stabilitätsanalyse anhand Nullstellen Steigung



Steigung positiv

Steigung = 0

Steigung = 0

Steigung negativ

⑤ Klassifizierung:

Linie $y = 1$

→ Die Pfeile oberhalb zeigen weg von der Linie und die Pfeile unterhalb auch: instabil

Linie $y = -1$

→ Die Pfeile oberhalb zeigen zur Linie und die Pfeile darunter zeigen zur Linie: stabil

Test Zwischenraum:

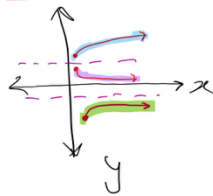
$y = 0 : y' = y^2 - 1$

$y' = 0^2 - 1$

$y' = -1$

Stabil

Stabilitätsdiagramm:



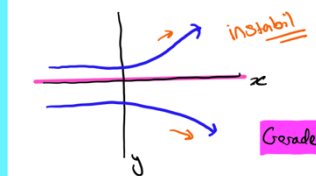
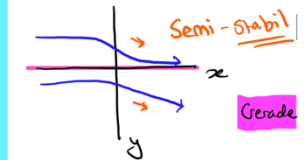
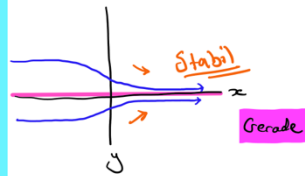
Klassifizierung Allgemein:

Stabil: Benachbarte Lösungen werden angenähert

Instabil: Benachbarte Lösungen werden abgewiesen

Semi-stabilität: Es gibt eine Annäherung auf der einen Seite und eine Abweisung auf der anderen Seite.

Stabilitäts-Diagramme:



Funktion: $y'x + y = 0$

① Nach y' umstellen:

$y'x + y = 0 \quad | -y$

$y'x = -y \quad | : x$

$y' = \frac{-y}{x}$

② Optisches Extrema:

Zähler = 0: $y' = \frac{-y}{x} = 0 \rightarrow y = 0$

Nenner = 0: $y' = \frac{-y}{x} = \infty \rightarrow x = 0$

$y' = \frac{-y}{x} = \infty \rightarrow$ Steigung ∞

$y' = \frac{-y}{x} = -\infty \rightarrow$ Steigung $-\infty$

③ Kontrolliertes Streichen:

Punkt $\Rightarrow x=1, y=2 \rightarrow a1$

$\therefore y' = \frac{-y}{x} = \frac{-2}{1} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

$y' = \frac{-y}{x} = -2 \rightarrow$ Steigung negativ

Richtungsfeld: Analyse

① Gleichung auf y' umstellen

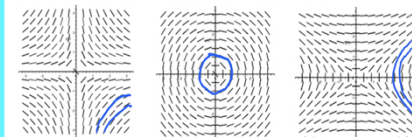
② Analyse optional

1. Bruch Fall:

Zähler = 0: Ergibt die Linie für die waagrechten striche (Nullklina)

Nenner = 0: Ergibt die Linie für die senkrechten striche (Polklina)

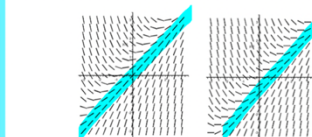
→ Optik: Messens Wirbel, Kreise oder Hyperbeln um des entscheidende "Achsenkreuz" herum.



2. Geradengleichung:

→ $y' = 0$ setzen: Ergibt eine waagrechte Hilfslinie (Nullklina)

Optik: Parallele Flüsse oder Linien, die sich an schräge anordnen



3. Exotische Funktionen:

→ $y' = x^2 + 1$: Steigung niemals negativ! Es gibt keine waagrechten striche

→ $y' = \sin(x)$: Setzt man auf null und fügt Werte für x ein, so erhält man schwankende Resultate.

oder $y' = \cos(y)$: Somit regelmäßiges Muster oder auch wellenartiges Verhalten.

→ $y' = \sqrt{x-y}$: Die Wurzel muss $\mathbb{R}^+$ also x muss immer größer als y sein.

oder $y' = \ln(x)$: Somit Richtungsfeld sieht halb abgeschnitten aus. Die halbe Grafik ist leer.

→ $y' = e^{x-y}$: e-funktion kann niemals 0 werden, es gibt daher keine waagrechten striche.

③ Kontrolliertes Streichen:

→ Punkte auswerten und die x und y Werte in die Funktion einsetzen.

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

→ Für jeden Quadranten einmal wiederholen um Muster zu erkennen

Funktion: $y' = x - y + 1$

① auf 0 setzen und auf y umstellen:

$0 = x - y + 1$

$y = x + 1$

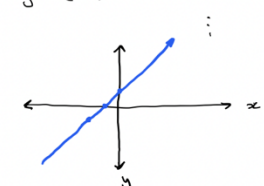
② Kontrolliertes Streichen

$x = (-2, -1, 0, 1, 2, 3)$

$y = (-2) + 1 = -1$

$y = (-1) + 1 = 0$

$y = (0) + 1 = 1$



Funktion: $y' = e^{x-y}$

① Nach y' umstellen:

(schon erledigt)

② Optisches Extrema:

$\therefore 0 = e^{x-y}$

→ eine e-funktion erreicht niemals die 0

$\therefore$ Das heißt es, kann keine waagrechten striche geben!

③ Kontrolliertes Streichen:

Punkt: $x=2, y=2 \rightarrow a1$

$\therefore y' = e^{x-y} = e^{2-2} = 1 \rightarrow$ Steigung positiv

$x=-1, y=-2 \rightarrow a3$

$y' = e^{x-y} = e^{-1-(-2)} = e^1 = e \rightarrow$ Steigung positiv

$x=-2, y=1 \rightarrow a2$

$y' = e^{x-y} = e^{-2-1} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

$y' = e^{x-y} = \frac{1}{e^3} \rightarrow$ Steigung positiv

Differentialgleichung mit e-funktion:

• Allgemeine Lösung

• Spezielle Lösung

$y' - x \cdot e^y = e^y \quad | + x e^y$

$y' = e^y + x e^y$

$y' = e^y (1+x)$

umschreiben:

$\frac{dy}{dx} = e^y (1+x) \quad | \cdot dx$

$dy = e^y (1+x) dx \quad | + e^y$

$\frac{1}{e^y} dy = (1+x) dx$

$\therefore \int \frac{1}{e^y} dy = \int (1+x) dx$

$\int e^{-y} dy = \int (1+x) dx$

$[-\frac{1}{e^y}] = [x + \frac{x^2}{2}]$

$\therefore -e^{-y} = x + \frac{1}{2}x^2 + c$

$\therefore -1$ um negativen Wert zu entfernen, man darf $\ln$! ...! immer auf negative Zahlen anwenden.

$\therefore e^{-y} = -x - \frac{1}{2}x^2 - c$

$\therefore$ Für $K = -c$

$\therefore e^{-y} = -x - \frac{1}{2}x^2 + K$

$\therefore \ln$ anwenden:

$\Rightarrow \ln(e^{-y}) = \ln(-x - \frac{1}{2}x^2 + K)$

$\therefore -y = \ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + K| \quad | \cdot -1$

$\therefore y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + K|$ Allgemeine Lösung

b) ii) → AWP $\Rightarrow y(1) = -1$

$\therefore -1 = -\ln|-(1) - \frac{1}{2}(1)^2 + K| \quad | \cdot -1$

$\therefore 1 = \ln|-1.5 + K| \quad | \cdot e$

$e^1 = e^{\ln|-1.5 + K|}$

$\therefore e = -1.5 + K \quad | + 1.5$

$K = 1.5 + e$

Somit

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$ Spezielle Lösung

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$

$y = -\ln|-x - \frac{1}{2}x^2 + 1.5 + e|$