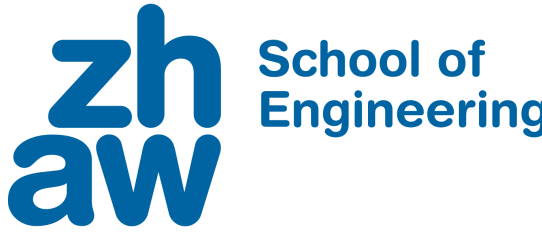


ZUSAMMENFASSUNG FESTIGKEITSLEHRE 2

franclu1
ZHAW School of Engineering



Biegung | Trägheitsmoment

Biegespannung im geraden Balken:

Nur gültig wenn yz = Hauptachsensystem ist

$$\sigma_b(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}(x)} z$$

Herleitung Biegespannung aus Balkengleichung (Numerik P1):

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \kappa$$

Dehnung einer Faser:

$$\varepsilon = z\kappa = -z\frac{M}{EI}$$

Spannung über das Hooke'sche Gesetz:

$$\sigma = E\varepsilon = E\left(-z\frac{M}{EI}\right) = -\frac{Mz}{I}$$

Biegespannungsformel:

$$\sigma = \frac{Mz}{I}$$

(Vorzeichen: Zug bzw. Druck)

Flächenträgheitsmomente:

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA > 0 \quad \text{axiales FTM}$$

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA > 0 \quad \text{axiales FTM}$$

$$I_{yz} = -\int_A yz dA \leq 0 \quad \text{gemischtes FTM}$$

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad \text{polares FTM}$$
$$= \int_A r^2 dA = I_{yy} + I_{zz} > 0$$

- Die Einheit der FTMe ist mm^4
- Die FTMe sind ein Maß für den Widerstand des QS gegen Biegung
- $I_{yz} = 0$, wenn die y - oder die z -Achse eine Symmetrieachse ist

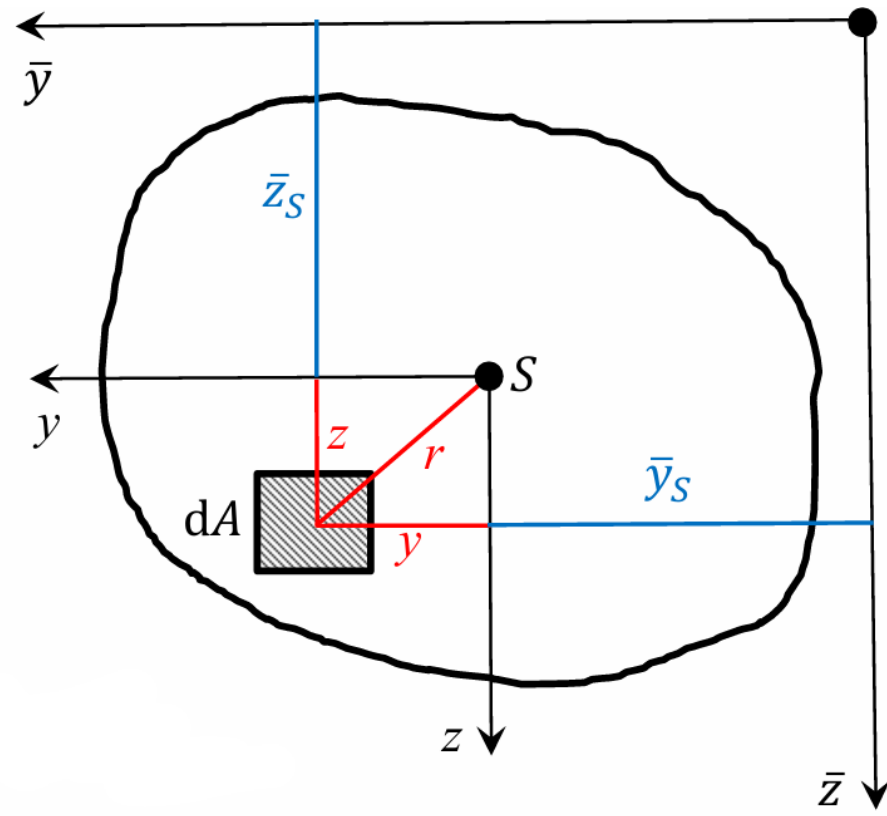
Satz von Steiner:

Flächenträgheitsmoment = Schwerpunkt-FTM + Fläche · Achsabstand²

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \bar{z}_S^2 A + I_{yy}$$

$$I_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{y}_S^2 A + I_{zz}$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = -\bar{y}_S \bar{z}_S A + I_{yz}$$



Rechteck:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad I_z = \frac{hb^3}{12}$$

Vollkreis:

$$I_z = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

Quadrat:

$$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$$

Flächenträgheitstensor

Flächenträgheitstensor:

$$\mathbf{I} = \int \left((\vec{r}^T \vec{r}) \mathbf{E} - \vec{r} \vec{r}^T \right) dA = \int \left(\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & y^2 + z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 & yz \\ zy & z^2 \end{pmatrix} \right) dA$$
$$= \int \begin{pmatrix} z^2 & -yz \\ -zy & y^2 \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Flächenträgheitstensor gedreht:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{I}' = \int \left(((\mathbf{a}\vec{r})^T (\mathbf{a}\vec{r})) \mathbf{E} - \mathbf{a}\vec{r} (\mathbf{a}\vec{r})^T \right) dA = \int \left((\vec{r}^T \vec{r}) \mathbf{a} \mathbf{E} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \vec{r} \vec{r}^T \mathbf{a}^T \right) dA$$
$$= \mathbf{a} \int \left((\vec{r}^T \vec{r}) \mathbf{E} - \vec{r} \vec{r}^T \right) dA \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \mathbf{I} \mathbf{a}^T$$

Transformationsgleichungen:

$$I_{y'y'} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos(2\varphi) + I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_{z'z'} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos(2\varphi) - I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_{y'z'} = -\frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \sin(2\varphi) + I_{yz} \cos(2\varphi)$$

Drehwinkel ins Hauptachsensystem:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte des Tensors):

$$I_{1,2} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{yy} - I_{zz})^2}{4} + I_{yz}^2}$$

Biegelinie

DGL der Biegelinie:

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_{yy}(x)}$$

Allgemeine Lösung:

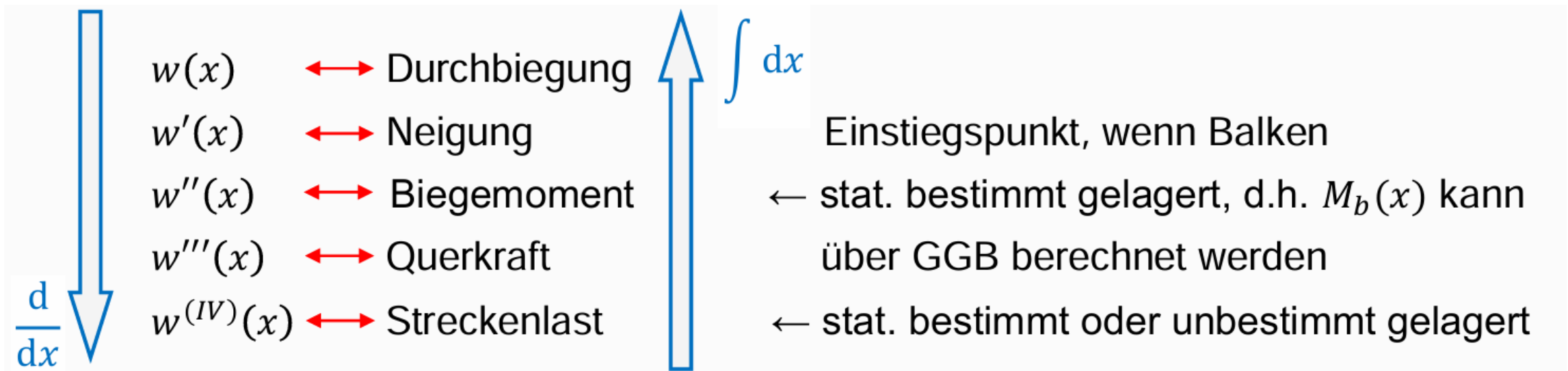
$$w(x) = -\iint \frac{M_y(x)}{EI_{yy}(x)} dx dx + C_1 x + C_2$$

Biegemoment:

$$M_y(x) = -EI_{yy}(x) w''(x)$$

Strecklast aus Biegelinie:

$$w^{(IV)}(x) EI_y = q(x)$$



Torsion kreisförmiger Vollquerschnitte

Schubspannung:

τ wächst von innen nach aussen

Differentialquotient heisst Verwindung

$$\tau = G r \frac{d\vartheta}{dx}$$

Schubspannung von Mises:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Schubspannung aufgrund Torsion

$$\tau = \frac{M_T}{J_T} r$$

Torsionsträgheitsmoment

Torsionsträgheitsmoment des Kreisquerschnitts:

$$J_T = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Torsionsträgheitsmoment des Kreisringquerschnitts:

$$J_T = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4)$$

Einverdrehwinkel zylindrische Welle:

$$\vartheta_L = \frac{M_T}{G J_T} \int_0^l dx = \frac{M_T x}{G J_T} \rightarrow \vartheta_{ges} = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

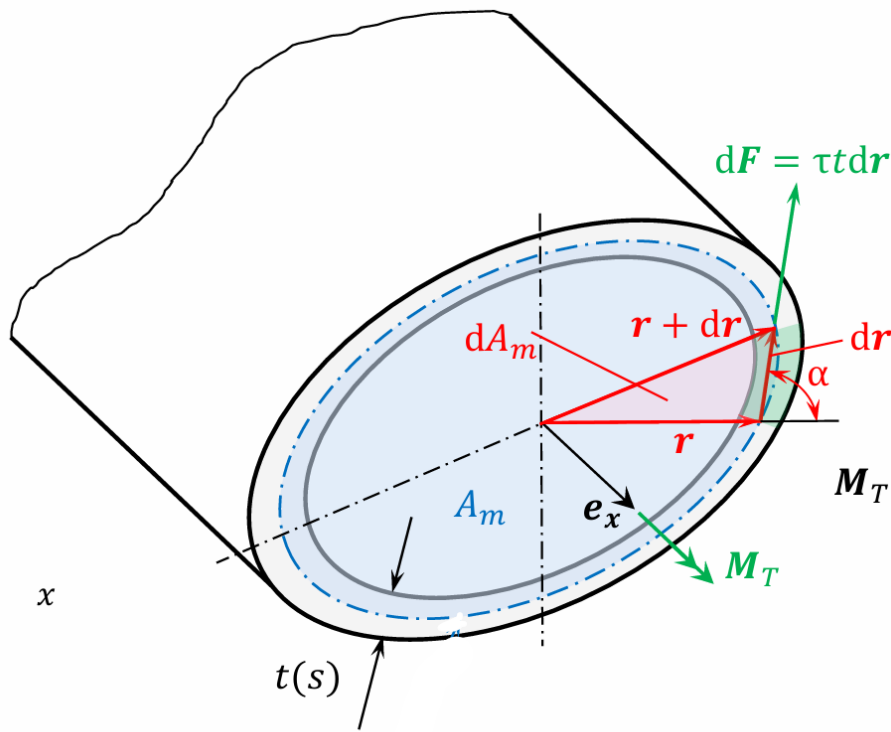
Torsion dünnwandiger geschlossener Profile

erste Formel von Bredt:

Schubspannung τ :

$$\tau = \frac{M_T}{2A_m t} = \frac{M_T}{W_T}$$

$$W_T = 2A_m t_{\min} = \frac{J_T}{r_a}$$



zweite Formel von Bredt:

Torsionssteifigkeit eines dünnwandigen geschlossenen Profils:

$$J_T = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

mit konstanter Wanddicke: (U=Umfang der Querschnittsdickenmittellinie)

$$J_T = \frac{4A_m^2 t}{U}$$

	Quadrat	Kreis	Dreieck
Schubspannung	$\tau = \frac{M_T}{2a^2 t}$	$\tau = \frac{M_T}{2\pi r^2 t}$	$\tau = \frac{M_T}{b^2 t}$
Steifigkeit	$J_T = \frac{4a^4 t}{4a}$	$J_{To} = \frac{4r^4 \pi^2 t}{2\pi}$	$J_T = \frac{4 \frac{b^4}{4} t}{2b + b\sqrt{2}}$

Torsion dünnwandiger offener Profile

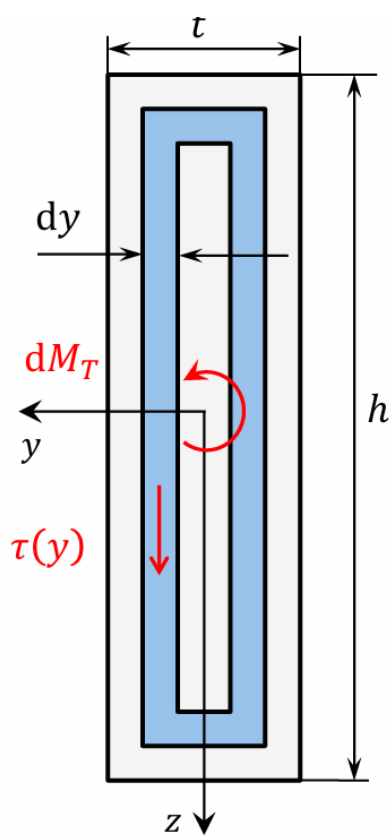
Torsionswiderstandsmoment/Trägheitsmoment

Torsionswiderstandsmoment (Wt)

$$W_T = \frac{1}{3} h t^2$$

Torsionsträgheitsmoment Jt)

$$J_T = \frac{1}{3} h t^3$$



zusammengesetzter Querschnitt Jt

$$J_T = \sum J_{Ti} = \frac{1}{3} \sum h_i t_i^3$$

zusammengesetzter Querschnitt Wt

$$W_T = \frac{J_T}{t_{max}} = \frac{1}{3 t_{max}} \sum h_i t_i^3$$

Merke

Geschlossen: dünn = max. Schubspannung, offen: dick = max. Schubspannung

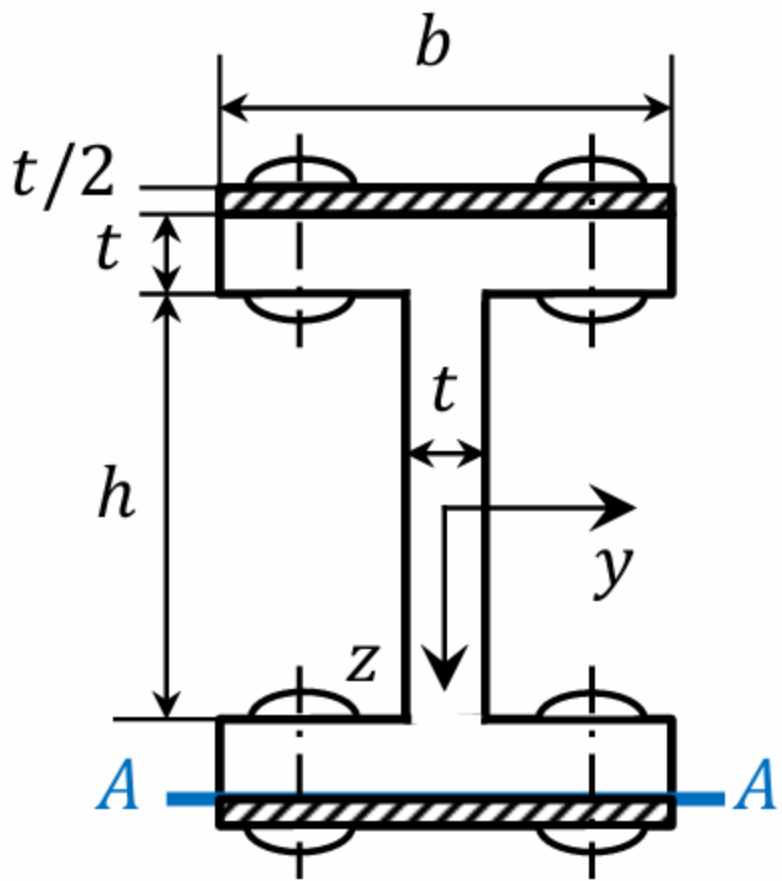
Querschub

Schubspannungsverteilung

$$\tau_{zx}(x, z) = \tau_{xz}(x, z) = \frac{Q(x) S(z)}{J_y b(z)}$$

statische Moment der Restfläche

$$S(z) = \int_{A^*} z dA^*$$



wenn h=b=5t ist S(x):

$$S(x) = \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot t \cdot \frac{t}{2} b$$

S(x): Abstand S zu Rand dA mal dA

Normalspannungen

Transformation von xy in x'y':

$$\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$

Drehwinkel ins Hauptsystem:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Hauptschubspannungen:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Normalspannung in Hauptspannungsebenen:

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$