

Vorfahren Abgeschlossenheit:

1. Ungleichung / Gleichung / beides?

1.1 Ungleichung:

$$\geq, \leq, <, >$$

Höchstwahrscheinlich **kein** Unterraum!

Verletzt höchwahrscheinlich: **Skalare Multiplikation**

1.2 Gleichung:

$$= 0$$

Alle Vorfahren durchgehen, bis man **0=0** hat

1.3 Beides:

Höchstwahrscheinlich **bedingungs** verletzung bei der **skalaren Multiplikation**!

1. Räume:

1.1 Standard Räume:

$$\bullet \text{ Im } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Im } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.2 Im Matrizenraum:

$$\mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\text{Für } 2 \times 2: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1.3 Im Polynom-Raum (z.B. $\mathbb{P}_2$):

$$p(x) = x_0 + x_1 + x_2 x$$

$$u_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Nullvektor:

$$\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (0) - 2(0) + (0) = 0$$

$$0 = 0$$

Somit Nullvektor enthalten

2. Addition:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\therefore ((x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3)) = (x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 + x_3 + y_3 = x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 + x_3 + y_3$$

$$\therefore x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3 = x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3$$

Somit gleich, daher ist die Addition abgeschlossen!

3. Skalare Multiplikation:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Links:

$$\therefore (\lambda(x_1 - 2x_2 + x_3)) = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$$

$$\therefore \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3) = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$$

$$\text{Somit: } \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3 = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$$

$$\therefore \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3) = \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Somit **hier** Skalare Multiplikation abgeschlossen

$\therefore U_1$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ✓

$$u_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0 \right\}$$

1. Nullvektor:

Bedingung: $\mathbb{R}^+$

1. Nullvektor:

$$\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 0 \geq 0$$

Somit Nullvektor enthalten

2. Addition:

$$f(x+y) \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + y_1 \geq 0$$

Für x_1 und y_1 in $\mathbb{R}^+$ ist die Addition **Abgeschlossen**

3. Skalare Multiplikation:

$$f(\lambda x) \geq 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

Für $x_1 \in \mathbb{R}^+$ ist skalare Multiplikation **Abgeschlossen** ✓

Wenn $x_1 \notin \mathbb{R}^+$ ist gegenbeispiel, somit ist die Skalare Multiplikation **nicht Abgeschlossen** ✓

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Nullvektor:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a=0 \quad b=0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit Nullvektor enthalten

2. Abgeschlossenheit unter Addition:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = a_1 + a_2 \quad b = b_1 + b_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Somit **Abgeschlossen** unter Addition

3. Abgeschlossenheit unter skalare Multiplikation:

$$A_1 \cdot \lambda = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix}, \quad a = a_1, \quad b = b_1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Somit **Abgeschlossen** unter skalare Multiplikation

$\therefore$ Somit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

Aufgabentypen (Spaltenvektoren):

Typ-1: Homogenes Gleichungssystem

$$\text{Beispiele: } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

ZSM: Für $\lambda=0$ ein Vektorraum, alle 3 Schritte anwenden!

Typ-2: Inhomogenes Gleichungssystem

$$\text{Beispiele: } x_1 + x_2 = 5$$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Null element.

Typ-3: Ungleichungen

$$\text{Beispiele: } x_1 \geq 0$$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Skalare Multiplikation

Typ-4: Nicht lineare Terme

$$\text{Beispiele: } x_1 + x_2 = 0$$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Addition

Aufg.

1. Spaltenvektoren:

$$\mathbb{R}^5 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

2. Matrizenräume $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

3. Polynom-Räume $\mathbb{P}_n$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

Lösungsmenge Vektoren:

$$\text{Beispiel: } u_2 = \{x_1 - 5x_2 = 0\}$$

1. Variabel suchen:

$\rightarrow$ Ohne verfahren der regeln!

2. Variablen:

$$x_1 - 5x_2 = 0 \mid +5x_2$$

$$x_1 = 5x_2$$

3. Einfügen:

$$\text{Standard Vektor: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4. Variablen:

$$\therefore \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \lambda, \quad x_3 = \mu$$

5. Umbenennen und Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabentypen (Matrizen-Räume):

Typ-1: Spaltenvektor

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ZSM: Ist ein Unterraum.

Typ-2: Nullmatrix

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ZSM: Scheitert bei Nullmatrix.

Typ-3: Produkt

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & a \cdot b \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ZSM: Scheitert bei Addition.

Typ-4: Determinante

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) = 0 \right\}$$

ZSM: Scheitert bei Addition.

Typ-5: Ungleichung

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid a_1 \geq 0 \right\}$$

ZSM: Scheitert bei skalare Multiplikation

Lösungsmenge Matrizen:

$$\text{Beispiel: } u = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Spalte:

$$\therefore \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix}$$

2. Zeilenmenge:

$$\therefore a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Zeilen und Spalte:

$$\therefore a = \lambda, \quad \mu = b$$

$$\therefore \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimension: $\dim(L) = 2$

$\rightarrow$ zwei frei variablen

Aufgabentypen (Polynomräume):

Typ-1: Summe

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_2 = 1 \}$$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-2: Keine

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 - 3a_1 + a_2 = 0 \}$$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-3: Konstante

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 - a_1 = 5 \}$$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-4: Produkt

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 \cdot a_1 = 0 \}$$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-5: Ungleichung

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 \geq 0 \}$$

ZSM: Scheitert bei Skalare Multiplikation

Lösungsmenge Polynome

$$\text{Beispiel: } u = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \}$$

1. Lösungsmenge aufstellen:

$$\therefore a_0 - 3a_1 + a_2 = 0$$

$$a_0 = 3a_1 - a_2$$

2. Ansatz:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\therefore p(x) = (3a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2$$

3. Spalten:

$$\therefore a_1 (3 + x) + a_2 (-1 + x^2)$$

4. Umbenennen und Lösung:

$$\therefore a_1 = \lambda, \quad a_2 = \mu$$

$$\therefore L = \left\{ \lambda (3 + x) + \mu (-1 + x^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Basis} = \left\{ 3 + x, -1 + x^2 \right\}$$

Dimension = 2

$\rightarrow$ Anzahl der Basis elemente

Lineare Abhängigkeit: Vektoren

Vorgehens:

Wenn quadratische Matrix möglich:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinante einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus: 3x3

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n-reihige Determinante:
-unterdeterminante: $\det(A_{21})$
-oberdeterminante: $\det(A_{12})$

→ Determinante reduzieren
→ $\det(A) = 0 \rightarrow$ linear abhängig
→ $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ linear unabhängig

Wenn nicht quadratisch: z.B. 3x2

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Ansatz

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. LGS als erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Gauss

;

4. Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -2\lambda_2 = 0 \quad | : -2$$

$$\therefore \lambda_2 = 0$$

$$\therefore \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\therefore \lambda_1 + 2(0) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0$$

→ Somit linear unabhängig

-nicht alle $\lambda = 0$
-linear unabhängig
-alle $\lambda = 0$
 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$

Die Vektoren sind dann linear abhängig, wenn sich einer als Linearkombi. der anderen darstellen lässt

Lineare Abhängigkeit: Matrizen

1. Linearkombination aus Matrizen:

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \dots$$

2. λ und Matrizen ausmultiplizieren

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 & \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. In Koeffizienten matrix bringen

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. In ZSF bringen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bewerten mit Gauß'scher Eliminationsverfahren

→ sind Variablen frei?

$$\therefore \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$$

→ linear abhängig

→ keine freien Variablen?

$$\therefore \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0$$

→ linear unabhängig

Lineare Abhängigkeit: Polynome

$$p_1(x) = 5, \quad p_2(x) = 1 - 4x, \quad p_3(x) = 3 + 8x, \quad p_4(x) = x + 7x^2$$

$$p_1(x) = 3 + 8x, \quad p_2(x) = x + 7x^2$$

1. Linearkombination aus Polynomen

$$\lambda_1(5) + \lambda_2(1 - 4x) + \lambda_3(3 + 8x) + \lambda_4(x + 7x^2)$$

2. Ausmultiplizieren und nach Grad sortieren

$$5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$

$$-4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_4 = 0$$

3. In erweiterte Koeffizientenmatrix schreiben und ZSF

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Lösung bewerten

• Falls λ variabel frei:

→ Somit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$

→ Polynome sind linear abhängig

• Falls λ nicht frei:

→ Somit $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

→ Polynome sind linear unabhängig

Koordinatenvektor: Vektoren

Berechnung $\vec{v}_B$ bedingt auf einen Vektor

$$\vec{v}_B \leftarrow \text{gewünscht}$$

Basis:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Vektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vorgehens:

1. Skalare:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. LGS aufstellen:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

$$0 - 2\lambda_2 + 0 = -4$$

$$\lambda_1 + 0 + \lambda_3 = 1$$

3. Lösen:

$$\therefore -2\lambda_2 - 4 = -4$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 1 \quad | - \lambda_3$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_3$$

$$\therefore 2(1 - \lambda_3) + 3(0) + \lambda_3 = 6$$

$$2 - 2\lambda_3 + 0 + \lambda_3 = 6$$

$$-2\lambda_3 + 6 = 6 \quad | -6$$

$$-2\lambda_3 = 0 \quad | : -2$$

$$\lambda_3 = 0 \quad | \rightarrow \lambda_1 = 1 - 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

4. Lösung:

$$\text{Somit ist } \vec{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung $\vec{v}$ bedingt auf B und $\vec{v}_B$

$$\vec{v} \leftarrow \text{Gewünschte}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

Vorgehens:

$$\vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatenvektor: Matrizen

Berechnen $\vec{v}_B$ bedingt auf eine Matrix

$$\vec{v}_B \leftarrow \text{gewünscht}$$

Basis:

$$B = (B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorgehens:

1. Skalare:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. LGS aufstellen:

$$\therefore 0 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 0 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 0 + 0 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0 = 0$$

3. Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ZSF}$$

→ Lösen, in ZSF

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = 0$$

$$-\lambda_3 = -1 \quad | : -1$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\lambda_2 + (1) + (0) = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 + (-1) + (1) = 1 \quad | -1 + 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

4. Lösung:

$$\vec{v}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnung M bedingt auf B und $\vec{v}_B$

$$M \leftarrow \text{Gewünschte}$$

$$B = (B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vorgehens:

$$M = -1 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$M = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatenvektor: Polynome

Berechnen $\vec{v}_B$ bedingt auf ein Polynom

$$\vec{v}_B \leftarrow \text{gewünscht}$$

Basis:

$$B = (p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = (1 + x)^2, p_3(x) = (1 + x)^3)$$

Polynom:

$$P(x) = 2 - x + 2x^2 + x^3$$

Vorgehens:

1. Skalare:

$$\lambda_1 p_0(x) + \lambda_2 p_1(x) + \lambda_3 p_2(x) + \lambda_4 p_3(x)$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (1 + x) + \lambda_3 (1 + 2x + x^2) + \lambda_4 (1 + 3x + 3x^2 + x^3)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_3 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + 3\lambda_4 x^2 + \lambda_4 x^3 + 3\lambda_4 x + 3\lambda_4 x^2 + \lambda_4 x^3$$

2. LGS:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2$$

$$0 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = -1$$

$$0 + 0 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 2$$

$$0 + 0 + 0 + \lambda_4 = 1$$

$$\therefore \begin{array}{l|l|l} \lambda_4 = 1 & \lambda_3 + 3\lambda_4 = 2 & \lambda_2 + 2(-1) + 3(1) = -1 + 2 = 1 \\ \lambda_3 + 3(1) = 2 & \lambda_3 + 3 = 2 & \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 & & \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$\lambda_1 + (-1) + (-1) + 1 = 2 \quad | +2$$

3. Lösung:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnung P(x) bedingt auf B und $\vec{v}_B$

$$P(x) \leftarrow \text{Gewünschte}$$

$$B = (p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x + x^2, p_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3)$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vorgehens:

$$\therefore 2 \cdot p_0(x) - 3 \cdot p_1(x) + 5 \cdot p_2(x)$$

$$2(1) - 3(1 + x) + 5(1 + x + x^2)$$

$$2 - 3 - 3x + 5 + 5x + 5x^2$$

$$4 - 3x + 5x + 5x^2$$

$$4 + 2x + 5x^2$$

$$P(x) = 4 + 2x + 5x^2$$

Lineare Abbildung: Verfahren Vektor

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1. Null element:

$\vec{x} \mapsto f_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x=y$
 $y=0$
 $\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Nullvektor vorhanden

2. Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Links:

$f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$

Vergleich:

$\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$

Somit Additivität abgeschlossen

3. Homogenität:

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda$

Links:

$f_3\left(\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\lambda f_3\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix}$

Vergleich:

$\begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 \end{pmatrix}$

Somit Homogen

$\therefore$ **Somit ist f_3 linear**

Lineare Abbildung: Verfahren Matrix

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 4x-0 \end{pmatrix}$

1. Null element:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 - 2 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit Nullvektor enthalten

2. Additivität:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(A+B) = f(A) + f(B)$

Links:

$\therefore \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Links = Rechts

$\therefore$ **Somit Additivität abgeschlossen**

3. Homogenität:

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Links:

$\lambda \begin{pmatrix} x & -2y \\ 4x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & -2\lambda y \\ 4\lambda x & 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\lambda \begin{pmatrix} x & -2y \\ 4x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & -2\lambda y \\ 4\lambda x & 0 \end{pmatrix}$

Links = Rechts

$\therefore$ **Somit Homogenität bewiesen**

$\therefore$ **Somit ist f eine lineare Abbildung**

Lineare Abbildung: Verfahren Trig. Funk.

$f_S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f_S(x) = \sin(x)$

1) Null element:

$\mathbb{R} = 0$
 $\rightarrow f_S(0) = \sin(0)$

$f_S(0) = 0$

Bild vom Nullvektor:

$0 = \checkmark$

2) Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(90^\circ + 90^\circ) = f(90^\circ) + f(90^\circ)$

Links:

$f(90^\circ + 90^\circ) = \sin(180^\circ) = 0$

Rechts:

$f(90^\circ) + f(90^\circ) = 1 + 1 = 2$

$0 \neq 2$

Additivität gescheitert, somit Abbildung nicht linear!

Lineare Abbildung und Definitionsbereich

$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} \mapsto f_1(\vec{x}) = |\vec{x}|$

Bild berechnen:

$|\vec{x}| \Leftrightarrow \text{Länge}$

$\therefore \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

Das Bild ist $\sqrt{2}$

Nullvektor:

$\mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore f_1(\vec{x}) = \sqrt{0^2 + 0^2}$

$f_1(\vec{x}) = 0$

Bestanden

Additivität:

2 Test Vektoren im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Links:

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 1 = 2$

$\sqrt{2} \neq 2$

Additivität gescheitert

Somit ist die Abbildung nicht linear

Lineare Abbildung und Def. Bereich

$f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto f_2(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$, wobei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

und $\vec{v} = \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bild berechnen:

$\therefore \vec{a} = \vec{e}_2$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = a_2$

Das Bild ist von $f_2 = \vec{a} \cdot \vec{x}$ ist a_2

Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Links:

$a \cdot f(x+y)$

$\therefore a \cdot x + a \cdot y$

Rechts:

$a(f(x) + f(y))$

$\therefore a \cdot x + a \cdot y$

$\rightarrow$ **Links = Rechts**

Additivität bewiesen

Homogenität:

$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

Links:

$a \cdot f(\lambda \vec{x})$

$a \cdot (\lambda \vec{x})$

$\rightarrow \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$

Rechts:

$a \cdot (\lambda f(\vec{x}))$

$\therefore a \cdot \lambda \vec{x} \rightarrow \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$

$\therefore \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$

Somit Homogenität bewiesen

$\Rightarrow$ **Somit ist f_2 linear**

Lineare Abbildung Verfahren: Polynom

Erhält man: $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$\rightarrow$ So wandelt man dieses Polynom in einen Vektor um!

$\therefore [2x^2 + 3x + 1]$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Jetzt Verfahren für Vektoren folgen

Basis:

Vorgehen um Basen zu finden:

1. erweiterte Matrix

2. Gauss-Verfahren $\rightarrow$ ZSF

3. Führende 1 $\rightarrow$ Anzahl bestimmt Rang = dim

Es braucht so viel Vektoren für eine Basis wie die dim.

Bilden die Vektoren eine Basis?

$\rightarrow$ Vektoren müssen linear unabhängig sein

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ In erweiterte Koeffizientenform

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ In ZSF bringen

$\rightarrow$ Rang und 0 analysieren

$r = n$: linear unabhängig

$r < n$: linear abhängig

Bilden die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis von $\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$?

1) Wie groß ist der Raum?

$\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$

$\rightarrow$ Gauss $\rightarrow$ ZSF $\rightarrow$ führende 1:

$\therefore$ dimension = dim(3)

$\therefore$ Prüfen ob Dimension spannen eine Basis bilden

2) Bilden $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis?

$\rightarrow$ Sind die Vektoren linear unabhängig?

$\rightarrow$ Man braucht nur die 3 Vektoren in der Gauss Matrix

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ dim(3)

Lineare Unabhängigkeit check:

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow 2=3$, somit linear unabhängig

Da die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ bilden eine Basis von $\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$

Dimension (je nach Art):

Vektoren:

Allgemein:

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \text{dim}(2)$

$\rightarrow$ Dimension $\rightarrow$ Anzahl der Zeilen

Standard basis = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Matrizen:

Allgemein:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dimension: Zeilen + Spalten = Dimension

Standardbasis:

für 2×2 zum Beispiel:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Polynome:

Allgemein:

$ax^2 + bx + c$

Dimension $\rightarrow$ Grad + 1

Standard basis $\rightarrow$ Monombasis $(1, x, x^2)$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{dim}(V_1) = 2$

$\rightarrow$ Beschreibt eine Ebene

Rang der Matrix: $r = \text{rang}(A)$; n Anzahl Spalten

$r \geq 0$ & $r \leq m$ gilt immer

min 1. Lösung:

$r = m$

$r < m$ & $b_k = 0$

eindeutig 1 Lösung

$\rightarrow r = n$

unendlich viele Lösungen:

$\rightarrow r < n$

keine Lösung:

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

Lösungsmenge eines Gleichungssystems:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(A) = 3$

$\text{rang}(A|b) = 4$

$\rightarrow$ keine Lösung

$b_k = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$

$b_k \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

$r = n$ 1. Lösung

$r < n$ unendlich viele Lösungen

$r < n$ keine Lösung

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+3y \end{pmatrix}$ **Vektor**

Input: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 Output: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Darstellungsmatrix Dimension: Output x Input
 $\therefore 2 \times 3$ (Zeilen x Spalten)

$\therefore \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+3y \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Input: 2×2
 Output: 2×2 **Matrix**

Darstellungsmatrix:

Output:
 $8 \times 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow 4$ Variablen

Input: $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow 4$ Variablen

$\therefore A \Rightarrow 4 \times 4$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: P_2 \rightarrow P_2$

$$f(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (3a+b)x + (4-b)$$

Input: $P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **Polynom**
 Output: $P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Darstellungsmatrix Dimension:

Output x Input

Input:

Kommen aus $P_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Zeilen

Output:

Kommen aus $P_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Spalten

Darstellungsmatrix:

Somit, $A = 3 \times 3$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Aufgabe:

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: P_2 \rightarrow P_2$, welche wie folgt definiert ist:
 $f(ax^2 + bx^2 + cx + d) = (2a-c)x^2 + (3a+b)x + (a-b)$

Input: $P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **Polynom**

Output: $P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Darstellungsmatrix Dimension:

Output x Input

Input:

Kommen aus $P_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$

$\therefore 3+1=4$

$\therefore 4$ Start Variablen $\rightarrow 4$ Zeilen

Output:

Kommen aus $P_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Spalten

Darstellungsmatrix:

Somit, $A = 4 \times 3$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verfahren: Gehört zu $\text{Ker}(f)$

1. Bedingung auslesen

2. Darstellungsmatrix

3. $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

4. Wenn Ergebnis Nullvektor:
 $\rightarrow$ Vektor $\vec{v}$ gehört zu $\text{Ker}(f)$

Wenn Ergebnis $\neq$ Nullvektor:
 $\rightarrow$ Vektor $\vec{v}$ gehört nicht zu $\text{Ker}(f)$

Gehört $p(x)$ zum Kern von f ?

Bedingung:

1. Darstellungsmatrix

2. $P(x)$

Aufgabe 3. (2+2 = 4 Punkte)

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} 2a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$

1) $P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Input: $\mathbb{R}^2$

Output: $\mathbb{R}^2$

$2+1=3$

Output: $\mathbb{R}^2$

Output x Input = Darstellungsmatrix

2×3

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

2) $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}$

$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit liegt das Polynom im Kern

Verfahren: $\text{Ker}(f)$, Basis und Dimension

Wann nutzen?

1. Darstellungsmatrix

2. $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

3. Gauss ZSF

4. Rang = führende Einsen

Dimension Basis = Dimension des Definitionsbereichs

Formel: Dimension - Rang = $\dim(\text{Ker}(f))$

$\rightarrow$ Die Info nutzen für Basis

Information

Fall 1: $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ (keine freien Variablen)

Wenn: Gauss $\rightarrow$ eindeutige Lösung ($r=n$)

Lösungsmenge: $\text{Ker}(f) = \{0\}$

$\rightarrow$ Es existiert keine Basis (keine Menge)

$\rightarrow$ Abbildung ist injektiv

Fall 2: $\dim(\text{Ker}(f)) > 0$ (Es gibt freie Variablen)

Wenn: Gauss $\rightarrow$ mind. eine Lösung mehr

variablen, viele Lösungen

5. Lösungsmenge vom Gauss

Eine freie Variable:

$u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}$

Ohne freie Variable:

$\text{Ker}(f) = \{0\}$

6. Die Basis:

Die Basis besteht aus den Vektoren

innerhalb der Lösungsmenge

Eine freie Variable

Somit Basis $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ohne freie Variable

Somit Basis $\text{Ker}(f) = \{0\}$

Verfahren: Gehört zu $\text{Im}(f)$

1. Bedingung auslesen

2. Darstellungsmatrix

3. Formel: $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

4. Wenn resultierender Vektor

die Bedingung erfüllt kein

Vektor $\in \text{Im}(f)$

1. Bedingung auslesen

$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

2. Darstellungsmatrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Formel: $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ = Vektor

4. Auswertung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit $\vec{a} \in \text{Im}(f)$

Liegt Vektor im $\text{Im}(f)$?

1. Bedingung auslesen

Gibt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu $\text{Im}(f)$?

2. Darstellungsmatrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Formel: $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ZSF}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bijektivität:

Konditionen

• Matrix ist invertierbar

• $\det(A) \neq 0$

• Nur Nullvektor im Kern

• Alle Vektoren sind im Bild

• Jede Zeile hat eine Formel 1

• Dimension von Definitionsbereich = Dimension Wertebereich

Verfahren:

1. Dimension überprüfen:

Ist der Definitionsbereich und Wertebereich von gleicher Dimension?

Z.B. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ X Nicht bijektiv

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ✓

Wieder zu 2. Determinante 3x3:

2. Determinante berechnen:

Wenn $\det(A) \neq 0$ somit bijektiv

3. Determinante berechnen:

Wenn $\det(A) \neq 0$ somit bijektiv

Determinante einer 2x2 Matrix:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Regel von Sarrus:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\rightarrow aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

Spiegelung an Geraden

$\mathbb{R}^2$ Koordinatengleichung der Geraden $ax + by + c = 0$
 Normalenvektor von $g \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (falls nur Winkel bekannt)
 $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $A_S = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$
 Für die Gerade $-x + y = 0$ $A_S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$
 Achtung bei Verwenden der Formel das so machen: $(\vec{r}) - 2a\vec{n}$

Streckung

längs der X-Achse: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ umkehrt: $A = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Gestreckt: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Geometrische Interpretation

Checkliste zur Beschreibung:

- Die Art der Transformation: Was ist passiert? (Benutze Fachbegriffe wie Drehung, Spiegelung, Streckung oder Scherung).
- Die genauen Parameter: Wie stark oder wo ist es passiert?
 - Bei einer Drehung: Um welchen Winkel und in welche Richtung?
 - Bei einer Spiegelung: An welcher Achse/Gerade oder an welchem Punkt?
 - Bei einer Streckung: Um welchen Faktor?

Die Streckung erfolgt über einen Faktor. Der Faktor wird in der Aufgabe gegeben.

Alle Geometrischen Transformationen sind Lineare Abbildungen. Man verwendet diese Abbildungsmatrizen und multipliziert diese mit der Funktion um das gewünschte Resultat zu erhalten.

$A_{\text{gesamt}} = \text{Streckung} \cdot y\text{-Spiegelung} \cdot x\text{-Spiegelung}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Verlangt die Aufgabe mehrere Geometrische Transformationen, so fängt man die Multiplikation mit der letzten an.

Scherung

längs der X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

längs der Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Drehung

Die Determinante einer Drehmatrix ist immer 1, somit bijektiv und umkehrbar (Invertierbar).

Wenn Winkel positiv:

Gegen den Uhrzeigersinn:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Wenn Winkel negativ:

Uhrzeigersinn:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Spiegelung x-Achse

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelung y-Achse

y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung: Nullpunkt für $\mathbb{R}^2$

Am Nullpunkt in Ebene $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektionen:

X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 XY-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 XZ-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 YZ-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektion auf Vektor $\vec{a}$:

Formel: $\text{fa}(\vec{b}) = \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Für 3x3 Matrix: $A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{a}^T$
 Für 2x2 Matrix: $A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y \\ a_x a_y & a_y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{a}^T$

Projektion xy Ebene

Projektion yz Ebene

Projektion auf y-Achse

Drehung um die Koordinatenachse im Raum:

um X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

um Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

um Z-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + bi$	$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$	$z = r e^{i\varphi}$
$a = r \cos(\varphi)$	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$	
$b = r \sin(\varphi)$	mit $\Delta = \begin{cases} 0^\circ, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180^\circ, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

Quadrant	Realteil (a)	Imaginärteil (b)	Lage in der Ebene
1. Quadrant	positiv (+)	positiv (+)	oben rechts $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$
2. Quadrant	negativ (-)	positiv (+)	oben links $\varphi \in [90^\circ, 180^\circ]$
3. Quadrant	negativ (-)	negativ (-)	unten links $\varphi \in [180^\circ, 270^\circ]$
4. Quadrant	positiv (+)	negativ (-)	unten rechts $\varphi \in [270^\circ, 360^\circ]$

Winkelbestimmung:

2. Quadrant	1. Quadrant
$\psi \in (-90^\circ, 0^\circ]$	$\psi \in [0^\circ, 90^\circ)$
$\varphi \in (90^\circ, 180^\circ]$	$\varphi \in [0^\circ, 90^\circ)$
$\Rightarrow \Delta = 180^\circ$	$\Rightarrow \Delta = 0^\circ$

3. Quadrant	4. Quadrant
$\psi \in [0^\circ, 90^\circ)$	$\psi \in (-90^\circ, 0^\circ]$
$\varphi \in [180^\circ, 270^\circ)$	$\varphi \in (-90^\circ, 0^\circ]$
$\Rightarrow \Delta = 180^\circ$	$\Rightarrow \Delta = 0^\circ$

Quadrant	Lage der Zahl	Korrekturwinkel Δ	Ergebnis φ
1. Quadrant	$a > 0, b > 0$	$+0^\circ$	$\varphi = \psi$
2. Quadrant	$a < 0, b > 0$	$+180^\circ$	$\varphi = \psi + 180^\circ$
3. Quadrant	$a < 0, b < 0$	$+180^\circ$	$\varphi = \psi + 180^\circ$
4. Quadrant	$a > 0, b < 0$	$+360^\circ$	$\varphi = \psi + 360^\circ$

Quadratische Gleichung auflösen:

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

1. Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13$$

$$D = -36$$

2. Anwendung Mitternachtsformel:

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

$$2 \cdot a$$

$$\Rightarrow \frac{-(-4) \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

3. Umwandlung komplexe Form:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} \quad | \quad \sqrt{-1} = i$$

$$\Rightarrow i\sqrt{36}$$

4. Anwendung in Mitternachtsformel:

$$\frac{-(-4) \pm i\sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{4}{2} + i\sqrt{36} \Rightarrow 2 + i\sqrt{36}$$

$$z_2 = \frac{4}{2} - i\sqrt{36} \Rightarrow 2 - i\sqrt{36}$$

Gleichung in kartesischer Form lösen: Für $a = 2$

$$z^2 = a + bi \quad | \quad a = 2$$

$$1. \text{ Gleichung}$$

$$z = (a + bi)$$

$$2. \text{ Gleichung einsetzen und auf Realteil und Imaginärteil auflösen:}$$

$$\therefore (a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$$\therefore a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i$$

$$I \quad a^2 - b^2 = 3$$

$$II \quad 2ab = 4$$

$$3. \text{ Nach einer Variablen auflösen:}$$

$$II \quad 2ab = 4 \quad | \div 2b$$

$$\therefore a = \frac{4}{2b}$$

$$\therefore a = \frac{2}{b}$$

4. a in I einsetzen:

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3$$

$$\therefore \frac{2^2}{b^2} - b^2 = 3 \quad | + b^2$$

$$\therefore \frac{4}{b^2} = 3 + b^2 \quad | \cdot b^2$$

$$\therefore 4 = 3b^2 + b^4 \quad | - 4$$

$$\therefore b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

5. Substitution mit $c = b^2$ | Gewinnumformung

$$\therefore c^2 + 3c - 4 = 0$$

$$\therefore \text{Mitternachtsformel:}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = -4 \leftarrow \text{Scheinelösung}$$

$$z = a + bi$$

Scheinlösungen eliminieren
 Wobei a und b $\in \mathbb{R}$
 Das bedeutet für b^2 kann eine Zahl niemals negativ sein!

6. b_1, b_2 und a_1, a_2 ausrechnen und komplexe Zahl aufschreiben:

$$\therefore \text{Da } c = b^2$$

$$\text{Somit } b = \sqrt{c}$$

$$\therefore b_{1,2} = \sqrt{c_1}$$

$$\therefore b_{1,2} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\text{Da } a = \frac{2}{b}$$

$$\therefore a_{1,2} = \frac{2}{\pm 1} = \pm 2$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1 i \rightarrow 2 + 1i = 2 + i$$

$$a_2 + b_2 i \rightarrow -2 - 1i = -2 - i$$

In Kartesischer Form:

$$W = \frac{i}{1 + \frac{2}{5+i}}$$

$$1. \text{ Konjugieren:}$$

$$W = \frac{i}{1 + \frac{2}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i}}$$

$$\Rightarrow W = \frac{i}{1 + \frac{2(5-i)}{(5+i)(5-i)}}$$

$$\therefore 2(5-i) = 10 - 2i$$

$$\therefore (5+i)(5-i) \Rightarrow \text{Binom}$$

$$\Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 5^2 - i^2$$

$$\Rightarrow 25 - (-1)$$

$$= 26$$

$$\therefore W = \frac{i}{1 + \frac{10-2i}{26}}$$

$$\therefore W = \frac{i}{\frac{26+10-2i}{26}}$$

$$\therefore W = \frac{i}{\frac{36-2i}{26}} = \frac{26}{36-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{26i}{36-2i}$$

2. Nochmal konjugieren:

$$\therefore W = \frac{26i}{36-2i} \leftarrow \text{Konjugieren}$$

$$\therefore W = \frac{26i}{36-2i} \cdot \frac{(36+2i)}{(36+2i)}$$

$$\therefore W = \frac{26i \cdot (36+2i)}{36^2 - 2^2}$$

$$W = \frac{26i \cdot (36+2i)}{(36-2i)^2}$$

$$W = \frac{26i \cdot (36+2i)}{1300}$$

$$W = \frac{936i + 52i^2}{1300}$$

$$W = \frac{-52 + 936i}{1300}$$

$$W = \frac{-52}{1300} + \frac{936i}{1300}$$

$$W = -\frac{1}{25} + \frac{48}{65}i$$

Die ersten binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ Binom})$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ Binom})$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{ Binom})$$

$$z^2 = 3 + 4i$$

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$2ab = 4 \quad | \div 2b$$

$$a = \frac{4}{2b}$$

$$a = \frac{2}{b}$$

$$a^2 - b^2 = 3$$

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3$$

$$\frac{2^2}{b^2} - b^2 = 3$$

$$\frac{4}{b^2} - b^2 = 3 \quad | + b^2$$

$$\frac{4}{b^2} = 3 + b^2 \quad | \cdot b^2$$

$$4 = 3b^2 + b^4 \quad | - 4$$

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$\therefore \text{Substitution: } c = b^2$$

$$\therefore c^2 + 3c - 4 = 0$$

$$\text{Mitternachtsformel:}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = -4 \leftarrow \text{keine Lösung weil negativ!}$$

$$\therefore b_{1,2} = \sqrt{c_1}$$

$$b_{1,2} = \pm 1$$

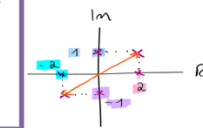
$$\therefore a_{1,2} = \frac{2}{\pm 1} = \pm 2$$

$$\therefore a_1 + b_1 i \Rightarrow 2 + i$$

$$a_2 + b_2 i \Rightarrow -2 - i$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Länge des Phas}$$



Aufgabe 23. Bestimmen Sie die Wurzeln der folgenden Gleichungen, indem Sie sie mit der kartesischen Form auflösen.

$$a) z^2 = 3 + 4i$$

Aufgabe 19. Bestimmen Sie die Wurzeln der folgenden algebraischen Gleichungen:

$$a) z^3 + 3z - z - 3 = 0$$

$$1. \text{ Klamern:}$$

$$z^3 + 2z - 3 = 0$$

$$2. \text{ Nullstelle erraten:}$$

$$z = 1$$

$$= 0$$

$$z^3 + 2z - 3 : (z - 1) = z^2 + z + 3$$

$$-(z^3 - z^2)$$

$$2z^2 + 2z - 3$$

$$-(2z^2 - 2z)$$

$$4z - 3$$

$$-(4z - 4)$$

$$1$$

$$\therefore z^2 + z + 3$$

$$-(1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3})$$

$$2 \cdot 1$$

$$\text{Divisor: } \sqrt{-11}$$

$$\text{Auflösen: } \sqrt{11} \cdot \sqrt{-1} \quad | \quad \sqrt{-1} = i$$

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}$$

a) $z^3 = i$

1. Betrag r und Argument φ ausrechnen:

$$z^3 = 0 + 1i$$

$$\therefore r = \sqrt{0^2 + 1^2}$$

$$\varphi = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

$$\therefore r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2}$$

$$r = \sqrt{1}$$

$$r = 1$$

$$\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

$$\Rightarrow z^3:$$

$$\therefore k = 3 \rightarrow 0, 1, 2 \text{ für } \varphi$$

$$n = 3$$

$$\therefore \varphi_0 = \frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$$

$$\varphi_1 = \frac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$$

Kartesischer Form $\rightarrow$ Eulersche Form

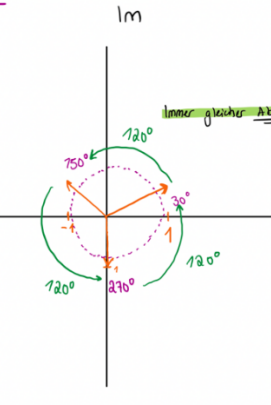


2. Skizzieren auf Gauß-Zahlenebene:

$$z_0 = 1e^{i30^\circ}$$

$$z_1 = 1e^{i150^\circ}$$

$$z_2 = 1e^{i270^\circ}$$



Aufgabe 3: Komplexe Gleichungen (8 Punkte)
Bestimmen Sie alle die Lösungen der Gleichung
 $z^2 - 27i = 0$
Geben Sie die Lösungen in der Eulerischen Form ($z = re^{i\varphi}$) an und skizzieren Sie diese grob
gedächtnislich (oder auf Papier) in der Gaußschen Zahlenebene.

$z^2 = 0 - 27i$

2) Eulerische form bestimmen
Betrug:
 $r = \sqrt{0^2 + (-27)^2}$
 $r = 27$

$\Rightarrow$ reellteil = 0
Imaginär = -27i

$\left. \begin{matrix} a=0 \\ b < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi = 270^\circ$

- Spezialfall:**
- $a = 0$ und $b > 0$ (Pfeil zeigt nach oben): Winkel ist 90°
 - $a = 0$ und $b < 0$ (Pfeil zeigt nach unten): Winkel ist 270° (oder -90°)
 - $a > 0$ und $b = 0$ (Pfeil zeigt nach rechts): Winkel ist 0° (oder 360°)
 - $a < 0$ und $b = 0$ (Pfeil zeigt nach links): Winkel ist 180°

Somit $\Rightarrow z^2 = 27e^{i270^\circ}$

2) Wurzeln bestimmen

$r_{\text{neu}} = \sqrt[n]{r_{\text{alt}}}$

$\therefore r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{27}$

$r_{\text{neu}} = 3$

$n = 3$, somit

$\therefore \varphi_k = \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{n}$, $k = 0, 1, 2$

Für $k=0$:

$\varphi_0 = \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3}$

$\varphi_0 = 90^\circ$

Für $k=1$:

$\varphi_1 = \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3}$

$\varphi_1 = 210^\circ$

Für $k=2$:

$\varphi_2 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3}$

$\varphi_2 = 330^\circ$

3) Fertige Wurzeln

$z_1 = 3e^{i90^\circ}$
 $z_2 = 3e^{i210^\circ}$
 $z_3 = 3e^{i330^\circ}$

$z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$ **Gesucht: Wurzeln der Gleichung**

1) Umwandlung kartesischer form $\rightarrow$ eulischer form

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore r = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$

$\therefore \varphi = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = 60^\circ$

$\therefore \varphi = 60^\circ + \alpha^\circ$

$\therefore \alpha^\circ = 0^\circ \rightarrow$ **Nach Tabelle:**

$\therefore \varphi = 60^\circ + 0^\circ$ a und b verglichen

$\varphi = 60^\circ$

2) Eulerische form

$z^4 = 16e^{i60^\circ}$

3) Wurzeln ziehen:

$z^4 = 16e^{i60^\circ} \mid \sqrt[4]{}$

$\therefore r = \sqrt[4]{16}$

$\therefore r = 2$

$n = 4$

$\varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}$ $k = 0, 1, 2, 3$

Für $k=0$

$\varphi_0 = \frac{60^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 15^\circ$

Für $k=1$

$\varphi_1 = \frac{60^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 105^\circ$

Für $k=2$

$\varphi_2 = \frac{60^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 195^\circ$

Für $k=3$

$\varphi_3 = \frac{60^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 285^\circ$

4) Lösungen:

$z_1 = 2e^{i15^\circ}$
 $z_2 = 2e^{i105^\circ}$
 $z_3 = 2e^{i195^\circ}$
 $z_4 = 2e^{i285^\circ}$

Ist eine Matrix invertierbar?

Determinante und LGS:

- $\det(A) \neq 0$
- Die Spaltenvektoren A sind linear unabhängig
- Die Zeilenvektoren A sind linear unabhängig
- Der Rang von A ist gleich n : $\text{rang}(A) = n$
- Matrix A ist invertierbar
- Das System hat eine eindeutige Lösung
- $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

$\det(A) = 0$:

- Die Spaltenvektoren A sind linear abhängig
- Die Zeilenvektoren A sind linear abhängig
- Der Rang A ist kleiner als n : $\text{rang}(A) < n$
- Matrix A ist singular (nicht invertierbar)
- Das System $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ hat keine eindeutige Lösung
- $\rightarrow$ kein $\vec{x}$ $\rightarrow$ keine Lösung

Eigenwerte für Dreiecksmatrizen & Diagonalmatrizen:

- Alle Werte der Hauptdiagonalen
- Alle Eigenwerte sind reell
- Für jeden Eigenwert λ gilt $\mu_{\lambda} = 1$
- Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- Skalarprodukt $= 0$

Komplexe Zahl: Potenz

$z = (-3 + \sqrt{3}i)^4 e^{i150^\circ}$

1) $\rightarrow$ eulischer form

$-3 + \sqrt{3}i = \Rightarrow$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$r = 2\sqrt{3}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \alpha$

$\varphi = -30^\circ + \alpha \mid \alpha < 0, b > 0 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$

$\varphi = -30^\circ + 180^\circ$

$\varphi = 150^\circ$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}e^{i150^\circ}$

$\therefore (2\sqrt{3}e^{i150^\circ})^4$

$\Rightarrow (2\sqrt{3})^4 \cdot e^{i4 \cdot 150^\circ}$

$\Rightarrow 144 \cdot e^{i600^\circ}$

2) **Zusammenführen**

$z = 144e^{i600^\circ} \cdot e^{i150^\circ}$

$z = 144 \cdot 1 \cdot e^{i600^\circ + i150^\circ}$

$z = 144e^{i750^\circ}$

$\left. \begin{matrix} 750 + 360 = 2 \cdot 360 \\ 750 - (2 \cdot 360) = 30^\circ \end{matrix} \right\}$

3) **Umwandeln:**

$z = 144 (\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ))$

Allgemein: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt:

$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matrix multiplikation

$\therefore \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda$ Ausklammern:

$\therefore -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit Eigenwert $\lambda = -2$

Für $\vec{x}$ und λ in $\mathbb{R}^2$: z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ gilt:

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matrix multiplikation

$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda$ Ausklammern

Somit Eigenwert $\lambda = 0$

Für $\vec{x}$ und λ in $\mathbb{R}^3$: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matrix multiplikation

$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda$ Ausklammern

Somit Eigenwert $\lambda = 1$

Matrix Multiplikation:

$\begin{vmatrix} A & \vec{x} \end{vmatrix}$

Matrix Multiplikation:

$\begin{vmatrix} A & \vec{x} \end{vmatrix}$

Matrix Multiplikation:

$\begin{vmatrix} A & \vec{x} \end{vmatrix}$

1) Eigenwerte finden

Formel: $\det(A - \lambda I) = 0$

2) Eigenraum bestimmen

Formel: $(A - \lambda I) \cdot \vec{z} = 0$

Bei mehreren Eigenwerten
Verfahren für positive Eigenwerte machen

Bei mehreren Eigenwerten
Verfahren für die jeweiligen Eigenwerte wiederholen

z.B. $\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = 2$

Lösungsmenge als Vektoren:

$\mathbb{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Lösungsmenge mit Parameter für freie Var:

Für freie Variablen i einsetzen

Für mehrere freie Variablen dann einfach jede Variable ausklammern

Probe: (Nur ein check)

Formel: $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

Vielfachheiten checken

4.1: Geometrische Vielfachheit:

Anzahl der Vektoren in der Geometrischen Interpretation

Lösung: $\vec{y} = \dots$

4.2: Algebraische Vielfachheit:

Nur der Eigenwert eine Einfache oder Doppelte Nullstelle

Wenn Einfach dann:

Wenn Doppel dann:

Bed. 1 $\leq \gamma \leq n$

5) Bedingung prüfen:

Bed. 1 $\leq \gamma \leq n$

γ und μ einsetzen:

Wenn bestanden: Rechnungsvorgehen Korrekt

Wenn verletzt: Rechnungsvorgehen nicht Korrekt

Spektrum (0): Menge aller Eigenwerte

$\therefore \sigma(A) = \{\dots, \dots\}$

Spektralradius (ρ):

Eigenwert der am weitesten von der 0 entfernt ist, egal ob + oder -

z.B. Eigenwerte: $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$

$\therefore$ Berechnung: $\rho(A) = \max(|3|, |-3|)$

Berechnung: $\rho(A) = \max(3, 3)$

Somit $\rho(A) = 3$

- Frage-Typ A: Überprüfen Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist. $\rightarrow$ Hier reicht den Vielfachheiten-Check ($\gamma = \mu$) als vollständiger Beweis völlig aus!
- Frage-Typ B: Diagonalisieren Sie die Matrix A und geben Sie die Matrizen P und D an. $\rightarrow$ Hier reicht das bloße Wissen nicht. Die Dozenten möchte die konkreten, fertig ausgefüllten Matrizen P und D mit den echten Zahlen auf deinem Prüfungsbogen sehen.

Diagonalisierung

Achtung: Eine Matrix ist diagonalisierbar falls:

$\gamma = \mu$

Für alle Eigenwerte der Matrix

Für tiefere Analyse:

Ablauf Allgemein: Diagonalisierung

1) Eigenwerte und Matrix D bestimmen

1.1 Berechnung der charakteristischen Gleichung

Formel: $\det(A - \lambda I) = 0$

Daraus können die Eigenwerte der Matrix

Man kann hier die Diagonalmatrix aufstellen

Für eine $n \times n$ Matrix:

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Bedingungen:

Wenn eine $n \times n$ Matrix benutzt wurde so γ_i die Matrix diagonalisierbar waren es verschiedene Eigenwerte gibt

8) Eigenvektoren und Matrix P bestimmen:

Eigenwerte in die Gleichung einsetzen:

$(A - \lambda I) \vec{z} = 0$

Achtung beim Gleichung lösen immer zu $\vec{z}_i$ mit dem ersten z aufpassen also z_1 und dann so weiter

Das gelöste GLS liefert 2 Werte, die 2 Werte bilden den Eigenvektor:

$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Dieses Verfahren wird für jeden Eigenwert einmal wiederholt

Matrix P wird durch das Kombinieren der Eigenvektoren kreiert:

$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix}$

Sollten hier Brüche stehen so kann man diese so wie sie sind lassen

3) Finale Bedingung:

$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ oder umgekehrt $\Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Die Matrizen werden eingesetzt, sollte die Matrix auf die Diagonale stehen, da so die Matrix diagonalisierbar

Spur:

Weg 1 (über die Original Matrix):

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Somit: Addition der Elemente auf der Hauptdiagonalen von Links nach Rechts unten

$\therefore \text{Spur}(A) = -1 + 1 = 0$

Weg 2 (über die Eigenwerte):

z.B. $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$

Somit: Einzelne Eigenwerte nehmen und mit einem algebraischen Vielfachheit multiplizieren und dann addieren

Satz 4.5.2:

$\text{Spur}(A) = \mu_1 \cdot \lambda_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \mu_n \cdot \lambda_n$

A2) $R^2 - R^3 \rightarrow f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$



Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ Eigenwert von f sind.

Allgemeine Gleichung:

$\det(A - \lambda I) = 0$

1) Elemente

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det(A - \lambda I) = 0$

$(-\lambda - \lambda) - (1 \cdot 1)$

$= \lambda^2 - 1 = 0$

$= \lambda^2 - 1 = 0 \quad | : -1$

$= \lambda^2 = 1$

Somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$

Geben Sie einen Eigenvektor $\vec{x}$ an.

$\lambda_1 = 1$

Allgemeine Gleichung:

$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$

1) Elemente:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

2) Einsetzen:

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Achtung: Vorzeichen Fehler, wenn λ negativ dann ist es $(-)$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

3) Auflösen:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = x_1$

$x_1 = x_2$

4) Beliebige Zahl einsetzen, außer 0:

$x_1 = 1$

$\therefore$ Weil $x_1 = 1$

$\rightarrow x_2 = x_1$

$\rightarrow x_2 = 1$

Somit Eigenvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Ähnlichkeit:

Determinante einer 2x2 Matrix:
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

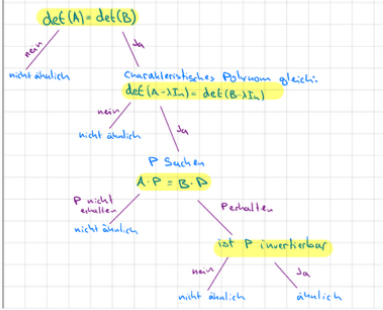
1) Determinantenvergleich

2) Vergleich der charakteristischen Polynomgleichung

3) P suchen

4) Ist P invertierbar?

Ähnlichkeit zwischen zwei Matrizen finden:



P finden: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $A \cdot P = P \cdot B$
 $\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$

Gauss:
 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ähnlichkeit und Diagonalisierung: $n \times n$

Seien A und B zwei $n \times n$ Matrizen, dann ist A ähnlich zu B, wenn eine invertierbare Matrix P existiert, so dass:

$P^{-1} \cdot A \cdot P = B \quad | \cdot P / P^{-1}$
 $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$Q = P^{-1} \rightarrow A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ A und B sind somit ähnlich

Eigenschaften von ähnlichen Matrizen:

- gleiche Determinante: $\det(A) = \det(B)$

- A ist genau dann invertierbar, wenn B invertierbar ist.

- A und B haben das gleiche charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

- A und B haben die gleichen Eigenwerte

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Determinante

$\det(A) = 4$

$\det(B) = 4$

Somit $4 = 4$

2) Charakteristisches Polynom:

$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda)$

$= 4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\therefore \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= ((2-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 0 \cdot 0)$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\therefore$ Somit $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

3) P suchen:

$A \cdot P = P \cdot B$

$\therefore A \cdot P = P \cdot B$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1) Eigenwerte und Matrix D bestimmen:

Bestimmung des charakteristischen Polynoms:

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= ((-1-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (4 \cdot 2))$

$= -1 - \lambda - \lambda - \lambda^2 - 8$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

$= \lambda^2 - 4\lambda - 9$

Bedingungen dass A diagonalisierbar ist:

- A hat linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\chi_\lambda = p_\lambda$
- A ist reell und symmetrisch

5.19. Subst. Kap 4 Teil 2

1. Die formale Hauptbedingung (immer gültig):

Eine Matrix ist exakt dann diagonalisierbar, wenn sie genau n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Der rechnerische Beweis (folgt immer gültig):

Algebraische Vielfachheit = Geometrische Vielfachheit ($a_\lambda = g_\lambda$)

Das bedeutet: Die Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren.

Polynomvielfachheit entspricht (nicht der Anzahl der Eigenvektoren, die die Gleichung erfüllt) für diesen Eigenwert erfüllt.

2. Die schenken Abkürzungen (stark diagonalisierbar):

Wenn in der Klausur eine dieser beiden Bedingungen zutrifft, kannst du dir den langen Beweis über die Vielfachheiten komplett sparen:

Abkürzung 1 (Verschiedene Eigenwerte): Die Matrix hat exakt n verschiedene Eigenwerte (Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Matrix ist exakt dann diagonalisierbar).

Abkürzung 2 (Symmetrie): Die Matrix ist reell und symmetrisch (d.h. $A^T = A$) dann ist die Hauptdiagonalen und spiegelsymmetrisch.

2) Schritt (Eigenvektoren und Matrix P bestimmen):

Eigenvektoren finden um die Eigenmatrix zu finden:

$(A - \lambda I) \vec{x} = 0$

Für $\lambda_1 = 3$: $(A - \lambda_1 I) \vec{x} = 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{$