

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiele

$$(3x^2 - 2) = (\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{2})(\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2})$$

Wurzeln

$$\sqrt[n]{\text{Wurzelexponent}} \sqrt[n]{\text{Radikant}} = \text{Wurzel} \quad \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \sqrt{\frac{a+b}{c^2}} = \left| \frac{\sqrt{a+b}}{c} \right|$$

$$\sqrt{\frac{ab}{c^2}} = \left| \frac{\sqrt{ab}}{c} \right|$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2 b} = |a\sqrt{b}|$$

$$\sqrt{x+a} = b \Rightarrow \sqrt{x+a^2} = b^2 \Rightarrow x+a = b^2 \Rightarrow x = b^2 - a$$

Logarithmus

$$\log_{\text{Basis}}(\text{Numerus}) = \text{Logarithmus}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$$

$$\log_a(u/v) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$$

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$\log_b(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$$

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n)$$

$$\log_a(x) = n \Leftrightarrow x = a^n$$

$$\log_n(n) = 1$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a(a^x) = \log_a(b) \Leftrightarrow x \cdot \log_a(a) = \log_a(b) \Leftrightarrow x = \log_a(b)$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

Potenzen

$$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenz}$$

$$a^0 = 1 \quad -x^2 = -(x^2) = -x \cdot x \neq (-x)^2 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Gleiche Basis

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Gleicher Exponent

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p+q) \cdot a^n$$

$$a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Varia

$$ax^n \cdot bx^n = abx^{2n} \quad ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Intervalle

Abgeschlossen $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

Offen $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Halboffen $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

Unendlich $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

Bruchrechnung

$$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Quotient}$$

$$\frac{1}{x} \text{ Stammbruch} \quad \frac{2}{4} \text{ echter Bruch } z < n \quad \frac{4}{2} \text{ unechter Bruch } z \geq n$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd} \quad x \frac{a}{b} = \frac{xa}{b} = \frac{x}{1} \cdot \frac{a}{b} \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc} \quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{ac}{b} \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} = \frac{a}{bc}$$

Summenzeichen

$$\sum_{k=s}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=s}^n a_k$$

$$\sum_{k=s}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=s}^n a_k + \sum_{k=s}^n b_k$$

$$\left(\sum_{k=0}^n (a_k \cdot b_k)\right) \neq \left(\sum_{k=0}^n a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k\right) \quad \sum_{k=s}^n a_k = \sum_{k=s-z}^{n-z} a_{k+z}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n a_{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}$$

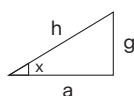
Geometrie

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\sin(\pi/2) = 1 \quad \cos(0) = 1$$

$$\sin(-\pi/2) = -1 \quad \cos(\pi) = -1$$

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0 \quad \cos(\pm\pi/2) = 0$$



Hypotenuse
Gegenkathete
Ankathete

$$\sin(x) = g/h \quad \cos(x) = a/h \quad \tan(x) = g/a$$

Rotierte Linie: $y = \tan(\alpha) \cdot x$, wobei $\tan(\alpha) = m$

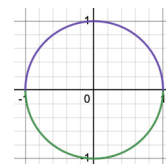
Kreis

Definition Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

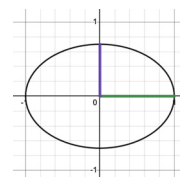
Zwei Funktionen, eine im Positiven, eine im Negativen



Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}}$$

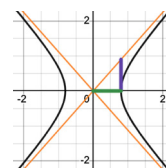
Die Menge aller Punkte, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Ellipse mit **Halbachse a** und **Halbachse b**.



Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2}$$

$$\text{Asymptoten}_{1,2} = \pm x \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$$



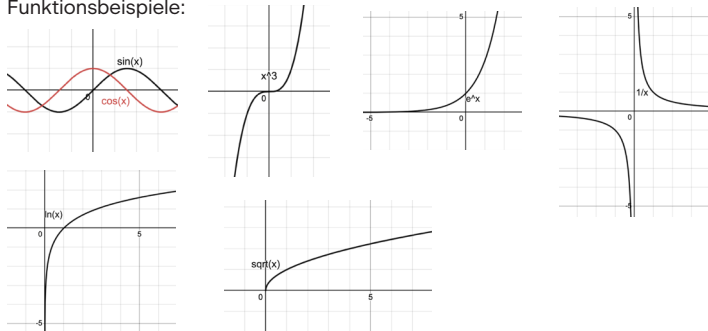
Varia

$$m(x) = \frac{(w_{\max} - w_{\min})(x - d_{\min})}{d_{\max} - d_{\min}} + w_{\min}$$

Funktionen

Definitionsbereich D (Input) sind Elemente x .
Wertebereich W (Output) sind Elemente $y = f(x)$

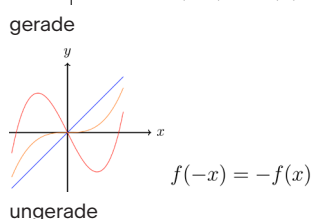
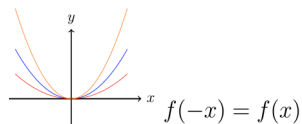
Funktionsbeispiele:



Gerade Fkt. sind achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse.
Nur wenn alle Exponenten in allen Termen gerade sind.

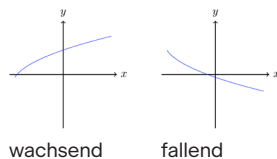
Ungerade Fkt. sind punktsymmetrisch bezüglich der Koordinatenursprungs.
Nur wenn alle Exponenten in allen Termen ungerade sind.

Die meisten Funktionen (mit gemischten Exponenten) sind weder gerade noch ungerade und weisen keine Symmetrie auf.



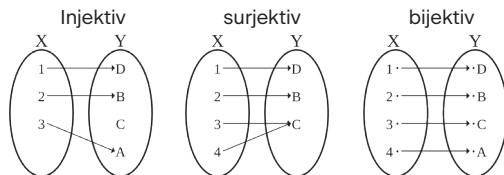
Monotonie

- monoton **wachsend**, wenn $x_1 < x_2$
- monoton **fallend**, wenn $x_1 > x_2$
- strenge Monotonie wenn Gleichheit ($\leq$) ausgeschlossen ist



Bijektivität

Abbildung $f: X \rightarrow Y$



Injektiv: Kein Wert aus dem Wertebereich (Y) kann mehr als einmal angenommen werden.

Surjektiv: Jeder Wert aus dem Wertebereich kann mindestens einmal angenommen werden.

Bijektiv: Jeder Wert wird genau einmal angenommen wird.
Nur bijektive Funktionen sind umkehrbar.

Umkehrfunktion

Eine Umkehrfunktion f^{-1} spiegelt f um $x = y$ und macht f sozusagen rückgängig: $f^{-1}(y) = x$. Nicht zu verwechseln mit dem Kehrwert! (Kehrwert ist auch reziprokem Wert genannt.)

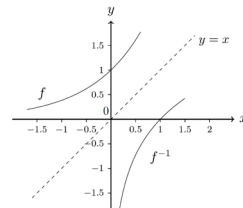
Umkehrfunktion bestimmen:

Bsp.: $y = x^3 - 2$

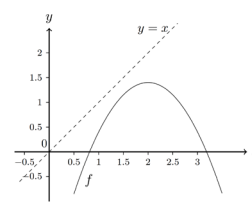
Nach x auflösen $x = \sqrt[3]{y + 2}$, x und y tauschen $y = \sqrt[3]{x + 2} = f^{-1}(x)$

Bsp.:

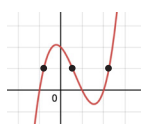
$$y = \frac{3x}{2x-5} \Rightarrow (2x-5)y = 3x \Rightarrow x(2y-3) = 5y \Rightarrow x = \frac{5y}{2y-3} \quad y = f^{-1}(x) = \frac{5x}{2x-3}$$



Nur bijektive Funktionen sind umkehrbar.



Nicht umkehrbare Funktion (weil surjektiv)



Für diese Punkte gibt es keine Umkehrfunktion (weil surjektiv). Möglichkeit: Definitionsbereich einengen, damit es eine Umkehrfunktion geben kann.

Komposition: $c(b(a(x))) = (c \circ b \circ a)(x)$

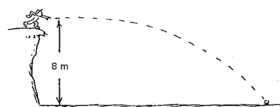
Funktionstransformation: $a f(b(x-h)) + k$

a : vertikale Zerrung

b : horizontale Zerrung

k : vertikale Verschiebung

h : horizontale Verschiebung



b kann als Einheit-Transformation verstanden werden. Z.B. wenn $f(x)$ Meter (m) repräsentiert, dann können die Angaben in mm mit $f(x)/100$ angegeben werden.

Ist $b < 0$ wird der Graph um die y -Achse gespiegelt.

Ist $a < 0$ wird der Graph um die x -Achse gespiegelt (auf den Kopf gesetzt).

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(x/2) = (x/2)^2$$

Definitionslücken

Polstellen

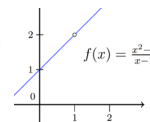
Eine Definitionslücke einer **rationalen Funktion** in denen die Funktionswerte gegen unendlich laufen.

Polstelle bestimmen: Nullstellen im Nenner bzw. Nullstellen des Zählerpolynoms. Nur wenn Nenner schneller wächst als Zähler.

$$y = \frac{x}{x^2-4} \text{ hat Polstellen } x_{1,2} = \pm 2 \text{ (= Nullstellen im Zähler)}$$

Hebbare Definitionslücke

«Loch» in der Funktion. Wenn Nullstelle gleichzeitig im Zählerpolynom und im Nennerpolynom ist.



Die Definitionslücke $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \end{cases}$ muss «gestopft» werden:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1 \quad \text{Faktorisieren, gleiche Terme kürzen.}$$

Weiteres Beispiel:

1. Nullstellen, Polstellen und hebbare Definitionslücken bestimmen:

$$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^4-x^3-13x^2+25x-12} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2(x-3)(x+4)}$$

Nullstelle: $x = -2$

Polstellen: $x = 1$ (doppelt), $x = -4$

Hebbare Definitionslücke: $x = 3$

2. Hebbare Definitionslücke «stopfen», Faktor $(x-3)$ kürzen:

$$\tilde{f}(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+4)} = \frac{x+2}{x^3+2x^2-7x+4} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 3 \\ \frac{5}{28} & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

Kurvendiskussion

Vorgehen

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Symmetrie (gerade/ungerade)
- Nullstellen
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte (insbesondere Sattelpunkte)

Einen Graphen skizzieren

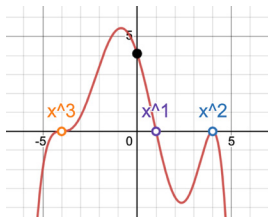
$$f(x) = a(x+4)^3(x-1)(x-4)^2$$

$$f(0) = a(0+4)^3(0-1)(0-4)^2 = 144/25$$

$$a = -1/100$$

Hinweis:

$f(x) = a(x+4)^3(-x+1)(-x+4)^2$ mit $a = 1/100$ wäre auch korrekt.



Richtung der Funktionen (ohne Ableitung)

Nullstellen der Faktoren in die anderen Faktoren einsetzen:

$$-1/100(x+4)^3(-4-1)(-4-4)^2 = +320/100(x+4)^3 \rightarrow \text{positiv: } x^3 \text{ steigend}$$

$$-1/100(1+4)^3(x-1)(1-4)^2 = -1125/100(x-1) \rightarrow \text{negativ: } x^1 \text{ fallend}$$

$$-1/100(4+4)^3(4-1)(4-4)^2 = -1536/100(x-4)^2 \rightarrow \text{negativ: } x^2 \text{ fallend}$$

Koeffizienten berechnen

Geg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ mit Wendepunkt (1, 4) und Steigung -6.

$$f(1) = a + b + c = 4$$

$$f'(1) = 3a + 2b = -6$$

$$f''(1) = 6a + 2b = 0 \quad (= \text{Wendepunkt})$$

Gleichungssystem:

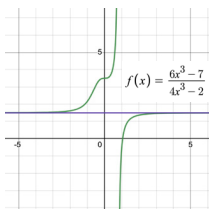
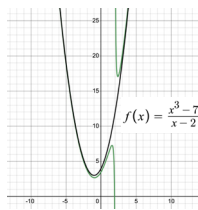
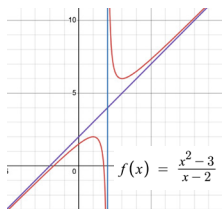
$$a + b + c = 4$$

$$3a + 2b = -6 \rightarrow a = 2, b = -6, c = 8 \quad \text{somit } 2x^3 - 6x^2 + 8$$

$$6a + 2b = 0$$

Asymptoten

Grenzgerade und Symmetrie. Eine Funktion bzw. eine Linie, die sich einer rationalen Funktion im Unendlichen annähert, d.h. wenn $x \rightarrow \pm\infty$



Vertikale Asymptote:

Asymptoten sind Nullstellen im Nenner.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \quad \text{mit Asymptote } = 2$$

Horizontale, schiefe oder gewölbte Asymptote:

Polynomdivision durchführen und Terme mit x im Nenner entfernen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2} \Rightarrow g(x) = x + 2$$

Die Asymptote $g(x)$ ist nur **gewölbt**, wenn Zähler-Grad > Nenner-Grad, d.h. Polynom nach Division hat Grad ≥ 2 .

Haben Zählerpolynom und Nennerpolynom gleich viel Grad, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um eine **horizontale** Asymptote:

$$f(x) = \frac{6x^3 - 7}{4x^3 - 2} \quad g(x) = \frac{6}{4}$$

Lösen von $ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\text{Bsp.: } p(x) = 2x^3 + 6x^2 + 8 = 0$$

1) Teiler von **d** in Polynom einsetzen bis Resultat 0 ergibt.

Teiler von **8** sind -1, 1, 2, 4, etc. Einsetzen von -1 in $p(x)$ ergibt 0. Somit $x_1 = -1$ und Nullstelle $(x + 1)$

2) Polynomdivision durchführen

$$(2x^3 + 6x^2 + 8) : (x + 1) = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$$

$$\text{Somit: } 2x^3 + 6x^2 + 8 = 2(x + 1)(x - 2)^2$$

Kritische Punkte und Extrema

Kritische Punkte: Punkte x_0 mit Eigenschaft $f'(x_0) = 0$

Allgemeines Kriterium:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

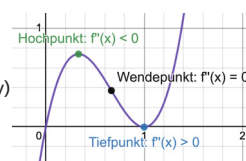
- Wenn **n gerade**, dann gibt es ein relatives Extremum
- Wenn **n ungerade**, dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt** und damit einen **Sattelpunkt**.

Typenbestimmung

$$f''(x) > 0: \text{relatives Minimum/Tiefpunkt (konvex)}$$

$$f''(x) < 0: \text{relatives Maximum/Hochpunkt (konkav)}$$

$$f''(x) = 0: \text{Wendepunkt}$$



Extrema

Relative Extremal-Stelle: x_0

Relatives **Extremum**: $y_0 = f(x_0)$

Relative Extremal-Punkt: $P_0 = (x_0, y_0)$

Wendepunkt = Wenn sich der Drehsinn der Kurve ändert

Sattelpunkte = Wendepunkte mit horizontaler Tangente

Differenzierbare Funktion: $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0$

D.h. die Funktion hat an der Stelle x_0 ein **relatives Extremum**.

Z.B. hat x^3 keine Extremalstellen.

Dreimal differenzierbare Funktion: $f''(x_0) = 0, \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0$

D.h. die Funktion hat an der Stelle x_0 ein **Wendepunkt**. Sattelpunkte wenn zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt. Z.B. hat x^4 keine Wendepunkte.

Extremalwertprobleme

Vorgehen:

1. Bestimmung der Zielfunktion, die es zu maximieren/minimieren gilt, Definitionsbereich festlegen.
2. Bestimmung der relativen Extremalstellen durch Lösen der Gleichung $f'(x_0) = 0$.
3. Bestimmung des gesuchten Maximums/Minimums durch Vergleich der Funktionswerte an den relativen Extremalstellen

Beispiel

Parabel $f(x) = -x^2 + 12$

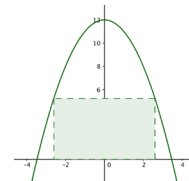
Wie gross ist der maximale Flächeninhalt des Rechtecks?

Zielfunktion: Halbe Fläche

$$F(x) = x \cdot f(x) = -x^3 + 12x$$

$$\text{Extremalstellen: } F'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$\text{Maximum: } x = 2 \text{ mit grösstmöglicher Fläche: } 2 \cdot F(2) = 2 \cdot (-8 + 24) = 32$$



Polynomfunktionen

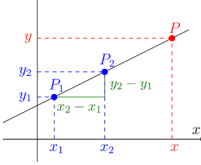
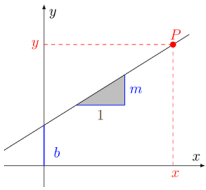
Bsp. Polynom mit Grad 5: $y = 3x^5 + 5x^2 + 6x - 4$
Ein Polynom mit Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Lineare Funktionen (Polynom 1. Grades)

$$y = mx + b$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$



Tangente einer Funktion an Stelle x_1

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = m \cdot x + b$$

Normale einer Funktion an Stelle x_1

$$n(x) = \frac{1}{-f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = x \cdot \frac{1}{-m} + b$$

Quadratische Funktionen (Polynom 2. Grades)

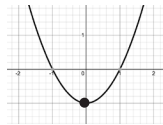
Hat die Funktion reelle Nullstellen, kann sie in **Produktform** geschrieben werden, wobei x_1, x_2 Nullstellen sind.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Scheitelpunktform

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = (x_0, y_0)$$



Nullstellen

$$f(x) = 0$$

Es gibt maximal Nullstellen wie Grad im Polynom.

Nullstellen von Polynomfunktionen berechnen:

Grad 0: Polynom hat keine Nullstelle.

Grad 1: $y = a \cdot x + b$ mit $a \neq 0 \rightarrow 0 = a \cdot x + b \rightarrow$ Nullstelle: $x = -b/a$

Grad 2: $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0 \rightarrow$ Mitternachtsformel
es gibt 0, 1, oder 2 Nullstellen

Grad ≥ 3 : Zu komplexeren Berechnungen von Nullstellen werden numerische Verfahren verwendet, siehe Tangentenverfahren von Newton. Wenn mind. eine Nullstelle bekannt ist, kann der Zerlegungssatz verwendet werden.

Rationalen Funktion

Nullstellen im Zähler. Bsp.: $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ hat Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1$

pq-Formel zum lösen von Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{Diskriminante}$$

Mitternachtsformel zum lösen von Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac \quad \text{Diskriminante}$$

Fallunterscheidung:

$D > 0$: Zwei verschiedene reelle Lösungen

$D = 0$: Eine (doppelte) reelle Lösung

$D < 0$: Keine reellen Lösungen

Zerlegungssatz für Polynome beliebiger Ordnung:

Wenn mind. eine Nullstelle bekannt ist. x_0 ist m -fache Nullstelle

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$$

$g(x)$ hat Polynomgrad $-m$

Nullstellen berechnen:

Bsp. Polynom mit Nullstelle $x = -1$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 8x^2 + 13x + 6) : (x + 1) = x^2 + 7x + 6 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ 7x^2 + 13x \\ \underline{-7x^2 - 7x} \\ 6x + 6 \\ \underline{-6x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$(x + 1) \cdot g(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 6) = (x + 1)^2(x + 6)$$

Somit ist $x = -1$ eine doppelte Nullstelle und $x = -6$ eine einfache Nullstelle.

Weiteres Beispiel nächste Seite

Bsp.: Polynom $x^5 + 4x^4 - 10x^2 x + 6$

mit einfacher Nullstelle $x = -3$ und doppelter Nullstelle $x = 1$

1. Divisor-Polynom bestimmen:

$$(x + 3)(x - 1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

2. Polynomdivision durchführen:

$$(x^5 + 4x^4 - 10x^2 x + 6) : (x^3 + x^2 - 5x + 3) = x^2 + 3x + 2$$

3. Nullstellen bestimmen oder nach x auflösen:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2 \text{ (einfache Nullstellen)}$$

4. Polynom vervollständigen

$$x^5 + 4x^4 - 10x^2 x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 1)^2$$

Polynom rekonstruieren. Bsp.: Polynom von Grad 5 hat bei

$x_1 = -2$ eine doppelte Nullstelle und bei $x_2 = 1$ eine dreifache Nullstelle:

$$p(x) = A(x + 2)^2(x - 1)^3$$

Koeffizienten-Gleichung

D.h. Gleichungssystem aufstellen.

$$\begin{array}{l} P(x) = ax + 2a + b \quad Q(x) = 3x + 2 \\ \left| \begin{array}{l} a = 3 \\ 2a + b = 2 \end{array} \right| \\ a = 3, \quad b = -4. \end{array}$$

Bsp.: Polynom von Grad 5 mit doppelter Nullstelle $x = 2$ geht durch die Punkte $Q_1(-2, 176)$, $Q_2(0, 4)$, $Q_3(1, -1)$ und $Q_4(3, -29)$.

$$p(x) = (x - 2)^2 \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

Punkte einsetzen:

$$Q_1(-2, 176) \Rightarrow (-2 - 2)^2 \cdot (a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d) = 176$$

$$Q_2(0, 4) \Rightarrow (0 - 2)^2 \cdot (a0^3 + b0^2 + c0 + d) = 4$$

$$Q_3(1, -1) \Rightarrow (1 - 2)^2 \cdot (a1^3 + b1^2 + c1 + d) = -1$$

$$Q_4(3, -29) \Rightarrow (3 - 2)^2 \cdot (a3^3 + b3^2 + c3 + d) = 29$$

Gleichungssystem:

$$176 = -128a + 64b - 32c + 16d$$

$$4 = 4d$$

$$-1 = a + b + c + d$$

$$-29 = 27a + 9b + 3c + d$$

$ax^2 + bx + c$ faktorisieren nach $a(x + p)(x + q)$

= Linearfaktordarstellung, d.h. Linearfaktor = Nullstelle

Mit ggT:

$$2x^2 - 6x - 56 = 2(x^2 - 3x - 28)$$

p und q finden, dh. $ax^2 + (p+q)x + (pq)$: **$p+q = b = -3$, $p \cdot q = a \cdot c = -28$**

$$p = -7, q = 4$$

$$2(x - 7)(x + 4)$$

Ohne ggT:

$$2x^2 - 5x - 3$$

p und q finden, d.h. $ax^2 + (p+q)x + (pq)$: **$p+q = b = -5$, $p \cdot q = a \cdot c = -6$**

$$p = -6, q = 1$$

$$2x^2 - 6x + 1x - 3 \rightarrow 2x(x - 3) + 1(x - 3) \rightarrow (2x + 1)(x - 3) \rightarrow 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

Bei $-ax^2 + bx - c$

1) Terme umkehren: $ax^2 - bx + c$

2) Faktorisieren und Vorzeichen wieder anfügen $-(x \pm x_1)(x \pm x_2)$

Varia: Diese Funktion hat vier Nullstellen

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Folgen und Reihen

Folge = geordnete Menge reeller Zahlen.

Reihe = die Summe einer Folge bis zu einer Grenze

$$a_k = f(k) \quad \text{oder} \quad (a_k)$$

Bildungsgesetze

- **explizit / direkt:** das k -te Folgenglied kann direkt berechnet werden, ohne dass man die vorherigen Folgenglieder kennt. Bsp.:

$$(b_k) = (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, \dots) \quad b_k = k \mod 3$$

- **rekursiv:** für die Berechnung des k -ten Folgenglieds ist es notwendig, dass man alle vorherigen Folgenglieder kennt.

$$(d_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots) \quad d_{k+2} = d_k + d_{k+1}$$

Folgen

- **arithmetisch:** $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \dots a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$
Wenn Differenz d zweier benachbarter Glieder immer gleich gross ist.

$$\text{Rekursive Form: } a_{k+1} = a_k + d \quad a_{k+1} - a_k = d$$

$$\text{Explizite Form: } a_n = A + (n-1) \cdot d \quad (n \geq 1) \quad n\text{-tes Glied}$$

$(n-1)$ ist Sprung zwischen Glieder. Um alle Glieder zu bestimmen braucht es: Anfangsglied $a_1 = A$ und Differenz d

Bei arithmetischen Folgen kann man aus dem rekursiven Bildungsgesetz ohne ein explizites Bildungsgesetz herleiten.

Ein beliebiges Glied der Folge (mit Ausnahme von a_1) ist das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$

- **geometrisch:** $a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \dots a_{n-1} \xrightarrow{\cdot q} a_n$
Wenn der Quotient zweier benachbarter Glieder immer gleich gross.

$$\text{Bsp: } a_k = \frac{1}{2^{k-1}} = (a_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right) \quad q = 1/2$$

$$\text{Rekursive Form: } a_{k+1} = a_k \cdot q \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

$$\text{Explizite Form: } a_n = A \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad n\text{-tes Glied}$$

Anfangsglied $a_1 = A$

Sind alle Glieder positiv, ist ein beliebiges Glied (mit Ausnahme von a_1) das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn: $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$

Es empfiehlt sich immer mit der expliziten Form arbeiten.

Formel aus Folge bilden

Arithmetische Folge $(6, 12, \dots) \rightarrow a_1 = 6, d = 6 \rightarrow a_n = 6 + 6(n-1) = 6n$

Geometrische Folge $(6, 12, \dots) \rightarrow a_1 = 6, q = 2 \rightarrow a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

Beispiel Aufgabe:

a_1 und d einer AF bestimmen und anschliessend a_{50} berechnen.

Geg. sind $a_6 = 13, a_{14} = 45$

- 1) Gleichungssystem bestimmen

$$\begin{array}{l|l} a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = 13 & | a_1 + 5d = 13 | \\ a_{14} = a_1 + (14-1) \cdot d = 45 & | a_1 + 13d = 45 | \end{array}$$

- 2) Gleichungssystem nach a_1 und d lösen

$$(a_1 + 5d) - (a_1 + 13d) = 13 - 45 \rightarrow d = 4 \rightarrow \text{einsetzen} \rightarrow a_1 = -7$$

Somit: $a_n = -7 + (n-1) \cdot 4$

- 3) a_{50} berechnen: $a_{50} = -7 + 49 \cdot 4 = 189$

$$\sum_{k=1}^{100} (3 + 4k)$$

- 1) Das ist eine arithmetische Folge mit $a_n = 3 + 4n$ oder $7 + 4(n-1)$

- 2) a_1 und d berechnen: $a_1 = 3 + 4 \cdot 1 = 7, d = 4$

- 3) Summelformel:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{7 + (3 + 4n)}{2} \quad \text{oder} \quad n \cdot \frac{7 + (7 + 4(n-1))}{2}$$

- 4) Summenwert berechnen:

$$s_{100} = 100 \cdot \frac{7 + 403}{2} = 20'500$$

Reihen / Partialsumme (S_n)

Eine Folge (a_k) wird bis zu einer oberen Grenze n aufsummiert und daraus eine **Reihe** (S_n) gebildet.

Eine Reihe (s_n) ist also eine **neue Folge**, die aus einer ursprünglichen Folge (a_k) gebildet wird. Bsp.:

$$(a_k) = (1, 2, 3, 4, \dots) \Rightarrow (s_k) = (1, 3, 6, 10, \dots)$$

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_n = a_1 + \dots + a_n \quad \text{und} \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

- Für **arithmetische** Folgen:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d \right)$$

Gausche Summelformel

Explizite Formel bestimmen, $A=1$ und $d=1$

$$\text{Bsp., } s_4 = 4 \cdot \left(\frac{1+4}{2} \right) = 10 \quad s_n = n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Für **geometrische** Folgen:

$$s_n = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Wenn $q = 1$, dann muss die arithmetische Formel verwendet werden.

Beispiel Aufgabe:

Wieviele Folgeglieder muss man addieren, damit die Summe einer AF mind. 1000 wird? Geg. $a_n = -7 + (n-1) \cdot 4$

Summe $s_n = 1000 = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$, wobei n = Anzahl Folgeglieder

$$n \cdot \frac{-7 + (-7 + (n-1) \cdot 4)}{2} = 2n^2 - 9n - 1000 = 0 \Rightarrow n = \lceil 24.72 \dots \rceil = 25$$

Geg.: Geometrische Folge $(6, 12, \dots)$, s_n soll mind. 6138 ergeben, was ist n ?

- 1) Folge bilden: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ mit $a_1 = 6, q = 2$

$$2) \text{ Summenformel: } s_n = 6 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 6 \cdot 2^n - 6$$

$$3) \text{ Gleichung lösen: } 6 \cdot 2^n - 6 = 6138$$

$$2^n = 1024 \rightarrow \log_2(2^n) = \log_2(1024) \rightarrow n = \ln(1024)/\ln(2) \rightarrow n = 10$$

Explizite Formel für arithmetische Folge a_n finden.

Geg. $s_5 = 40$ und $s_8 = 100$

- 1) Summelformel. Formel a_n ist unbekannt $\rightarrow$ zweite Formel verwenden:

$$5 \left(A + \frac{2}{4} d \right) = 5(A + 2d) = 40 \quad 8 \left(A + \frac{7}{2} d \right) = 100$$

- 2) Gleichungssystem lösen:

$$| 5A + 10d = 40 |$$

$$| 8A + 28d = 100 | \quad A = 2, \quad d = 3$$

- 3) Explizite Formel für Folge a_n bilden:

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

Monotonie

Eine Folge ist **monoton fallend** wenn:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} / a_n \leq 1$$

Eine Folge ist **monoton steigend** wenn:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} / a_n \geq 1$$

Beschränktheit

Nach **oben beschränkt**, wenn es eine Zahl M gibt, sodass alle Folgeglieder $\leq M$. M heisst obere Schranke der Folge.

Sinn gemäss für die untere Schranke.

Es kann auch bereits eine Aussage gemacht werden, wenn eine **schiefe/gekrümmte** und **fallende/steigende Asymptote** existiert $\rightarrow$ Polynomdivision durchführen.

Bsp.:

- a) Untersuche die Folge $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ auf Beschränktheit.

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \leq \frac{n^2+1}{n^2+1} = 1 \Rightarrow \text{nach oben beschränkt}$$

$$a_n \geq 0 \quad (\text{offensichtlich}) \Rightarrow \text{nach unten beschränkt}$$

- b) Untersuche die Folge $\frac{n^2+1}{n}$ auf Beschränktheit.

$$a_n = \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n} \approx n \quad (\text{für grosse } n) \Rightarrow a_n \text{ wird beliebig gross}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x_n &= \frac{1 - n + n^2}{n \cdot (n+1)} = \frac{\cancel{1} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + 1 \right)}{\cancel{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &\leq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{nach oben beschränkt.} \end{aligned}$$

Grenzwert von Folgen

Wenn $n \rightarrow \infty$, d.h. asymptotisches Verhalten von Folgen.
Eine Folge (a_n) besitzt keinen oder höchstens einen Grenzwert.

- **konvergent:** falls eine Folge einen Grenzwert besitzt.
Eine **monotone**, beschränkte Folge ist konvergent.
- **divergent:** Folge besitzt keinen Grenzwert. Es gibt entweder oszillierende Folgen oder Folgen mit Divergenz die gegen unendlich konvergieren. Bsp:
oszillierend: $(a_n) = ((-1)^n)$, d.h. $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
unendlich: $(a_n) = (3 + 2n)$, d.h. $(a_n) = (5, 7, 9, 11, \dots)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
= bestimmt divergent

Rechenregeln für Grenzwerte von geometrischer Folgen

(a_n) und (b_n) sind konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b .

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b}$, falls $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$ falls $a_n \geq 0$ und $a \geq 0$

Bei **unbestimmten Ausdrücken** wie $0/0$ oder ∞/∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{Bernoulli-de l'Hospitalsche Regel}$$

Anwendungsbeispiele:

Mit x^n kürzen

$$\frac{4n^3 - 2n^2 + 5n - 8}{-7n^3 + 4n^2 - 6n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{-7 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{4 - 0 + 0 - 0}{-7 + 0 - 0 + 0} = -\frac{4}{7}$$

mit n^3 kürzen

Mit n^x kürzen

$$\frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

mit 3^n kürzen

Erweitern $\sqrt{a(n)} + \sqrt{b(n)}$

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2n + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2n + 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2n + 1})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2n + 1}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Erweitern zu $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{5n})^n$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^a &= e^a \\ \left(1 + \frac{1}{5n} \right)^n &= \left(1 + \frac{1}{5n} \right)^{\frac{5n}{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5n} \right)^{5n} \right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^{4n} = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3n}{2}} \right)^{\frac{3n}{2}} \right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

$4n = \frac{3n}{2} \cdot a$
 $a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}$

Einschliess-Kriterium

Sind (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$
und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Grenzwerte von Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ = Partialsummen einer unendlichen Folge

Ist eine Reihe konvergent, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (= Nullfolge)

Nicht alle Nullfolgen konvergieren!

Eine Reihe konvergiert die Folge mit a^x im Nenner $x > 1$.

Beispiele

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ist konvergent}$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{ist divergent, weil } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ obwohl Folgenglieder gegen Null konvergieren.}$$

Grenzwerte Elementarer Folgen

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (q < 1)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

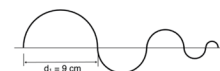
Geometrische Folgen

- $|q| < 1$ konvergiert gegen 0
- $|q| = 1$ konvergiert gegen A (konstant)
- $|q| > 1$ divergiert gegen ∞
- $|q| = -1$ Grenzwert existiert nicht, d.h. ist divergent

Beispiel Aufgabe

Gesucht ist die Länge einer unendlichen Linie:

Jeder Folgekreis ist um $1/3$ kleiner.



Geometrische Folge mit $d_1 = 9$ (= Durchmesser) und $q = 2/3$

Umfang Halbkreis = $d \cdot \pi / 2$

$$d_n = A \cdot q^{n-1} = 4.5 \cdot \pi \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad A = \frac{9\pi}{2} = 4.5\pi$$

$$\begin{aligned} s_{\infty} &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{1}{1 - q} \quad \text{weil} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 0 \\ &= 4.5\pi \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 13.5\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Grenzwerte von Funktionen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ Funktion f konvergiert an der Stelle x_0 gegen y_0 .
 x_0 muss nicht im Definitionsbereich von f liegen.

Stetigkeit

- Eine Stelle x_0 heisst **stetig**, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ mit dem Funktionswert übereinstimmt.
- **Stetige Funktion:** Wenn jede Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, d.h. Funktionen ohne Unterbruch und ohne Lücken.

Differenzierbarkeit

- Wenn für eine Funktion an der Stelle x_0 ein **Grenzwert (=Ableitung)** existiert, so heisst f an der Stelle x_0 differenzierbar.
- Eine Funktion ist differenzierbar, falls die Kurve **keine Knicke** macht

Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 1}{5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{x}}{5 + \frac{6}{x}} = \frac{7 + 0}{5 + 0} = \frac{7}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Ableiten

Tangentensteigung/momentane Änderungsrate einer Funktionskurve an einer Stelle. Kann die Geschwindigkeit eines Körpers im Raum oder die Zuwachsrate einer Ökonomischen Grösse beschreiben.

Differentialquotient (Ableitung) an Stelle x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$(x^2)' = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

$f'(x)$ Beschreibt momentane Geschwindigkeit

$f''(x)$ Beschreibt momentane Beschleunigung

Elementare Funktionen

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\log_a(x)' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$$

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

Höhere Ableitungen

Faktorregel (Konstante)

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x) \quad \left(\frac{x^n}{C}\right)' = \frac{(x^n)'}{C}$$

Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = (f_1'(x)f_2(x) \dots f_n(x)) + (f_1(x)f_2'(x) \dots f_n(x)) + \dots + (f_1(x)f_2(x) \dots f_n'(x))$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{C}{x^n}\right)' = -\frac{C \cdot (x^n)'}{(x^n)^2}$$

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Kettenregel

$$((f \circ g)(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$((f \circ g \circ h)(x))' = (f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiele

Kettenregel

$$(\sqrt{3x^2 + 4x})' = ((3x^2 + 4x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} (3x^2 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x + 4) = \frac{6x + 4}{2\sqrt{3x^2 + 4x}} = \frac{3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{25+x^2}}{2}\right)' = \frac{((25+x^2)^{\frac{1}{2}})' \cdot (25+x^2)'}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{25+x^2}} \cdot 2x}{2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}}$$

Umkehrfunktion

Wenn ein Funktion eine bekannte Umkehrfunktion ist, kann zur Ableitung diese Formel verwendet werden:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Bsp.: Wir möchten $\sqrt{x}$ ableiten. Zugleich ist $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von x^2 .

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{((\sqrt{x})^2)'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Integralrechnung

Integrieren / Aufleiten = Umkehrung einer Ableitung

Stammfunktion / unbestimmte Integral

Stammfunktion $F(x)$ = Funktion nach dem integrieren = Ursprungsfunktion $f(x)$
Die Stammfunktion $F(x)$ ist nicht eindeutig definiert. Durch Addition einer Konstanten können beliebig viele weitere Stammfunktionen erzeugt werden.

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ heisst das unbestimmte Integral:

$$\int f(x) dx$$

Bsp.: unbestimmtes Integral/Stammfunktion von x^3 ist $\frac{x^4}{4} + C$

Unbestimmte Integrale

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \log_a(x) dx = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$$

$$\sqrt{x} \rightarrow F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int a dx = a \cdot x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Beispiele:

$$\int \sqrt{x} dx = \int \sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} \sqrt[4]{x^7}$$

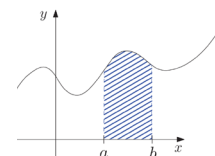
$$\int x^{\frac{8}{5}} dx = \frac{7}{15} x^{\frac{13}{5}} + C$$

$$\int \sqrt{ax} dx = \int \sqrt{a} \sqrt{x} dx = \frac{4\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} \quad \text{Bsp: } \int \sqrt{4x} dx = \int 2\sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

Bestimmtes Integral

Flächeninhalt unterhalb der Funktionskurve von $f(a)$ bis $f(b)$.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$



Beispiele

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

Rechenregeln

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Flächenberechnung bei Funktionen mit wechselnden Vorzeichen

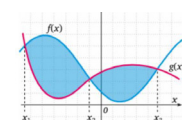
(y-Werte < 0) muss jeder Teilintervall separat berechnet werden. Dazu müssen die Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ zwischen dem Intervall $[a, b]$ berechnet werden und die absoluten Beträge addiert werden.

Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$:



$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^b f(x) dx \right|$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$:

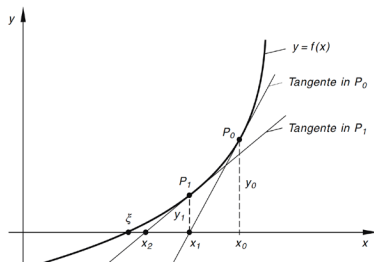


$$\left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Tangentenverfahren von Newton

Näherungsverfahren (Rekursionsformel) zur Bestimmung von Nullstellen, wenn Gleichungen nicht analytisch gelöst werden können.

Die Folge (x_n) konvergiert gegen die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Erläuterung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \rightarrow \frac{0 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newton-Schritt: $|x_n - x_{n-1}|$

Differenz zwischen Iterationsschritt

Horner-Schema

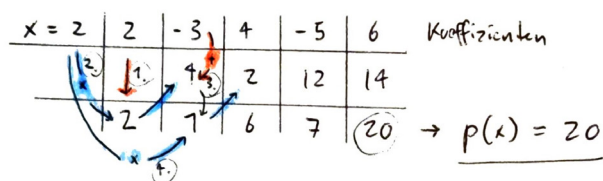
Berechnungsverfahren für die Funktionswerte von Polynomen, das die Anzahl Multiplikationen stark reduziert. Verwendung:

- Polynomdivision
- Auswertung von Polynomen

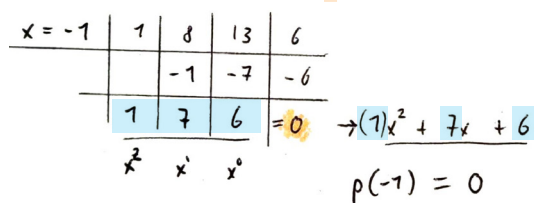
$$3x^4 + 5x^3 + x + 1 = (((3x + 5)x + 0)x + 1)x + 1$$

Polynom auswerten. Bsp.: $p(x) = (((2x - 3)x + 4)x - 5)x + 6$

mit $x = 2$



Polynomdivision. Bsp.: $x^3 + 8x^2 + 13x + 6 : (x + 1) = x^2 + 7x + 6$ mit Nullstelle $x = -1$, d.h. $p(-1) = 0$



Polynomdivision

Einfaches Bsp. Division mit Rest: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$ -> Rest 3 mit Divisor teilen.

$$\frac{x^3 - 3}{x - 2} \rightarrow x - 2 \overline{) x^3 - 3} \rightarrow x^2 + 2x + 4 + \frac{5}{x - 2}$$

Konvergenz von Folgen

$|a_n - a| < \varepsilon$ a = Grenzwert von a_n Gesucht ist n

Offene Frage: oder ist a = Asymptote?

Beispiel 5: Gegeben ist die Folge $a_n = 3 + \frac{1}{n}$.

b) Es sei $\varepsilon = 0.001$. Berechnen Sie die kleinste natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

Lösung

Es gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \left(3 + \frac{1}{n} \right) - 3 \right| < 0.001 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0.001 \Leftrightarrow 1000 < n$$

$$\Rightarrow n_\varepsilon = 1000$$

Beispiel 2:

Gegeben ist die Folge $x_n = \frac{n-2}{n+1}$

ε sei 0.1. Berechnen Sie n_ε .

Die Folge hat den Grenzwert $= 1$ (= horizontale Asymptote)

$$\left| \frac{n-2}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{n-2}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{n-2-n-1}{n+1} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{-2n-3}{n+1} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2n+3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow 20n+30 < n+1 \Rightarrow 19n < -29 \Rightarrow n < -1.5$$

$$n_\varepsilon = 29$$

Integrationsregeln

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

$$f(x) \xleftarrow{\text{integrieren}} f'(x)$$

$$g(x) \xrightarrow{\text{ableiten}} g'(x)$$

Bsp:

$$\begin{aligned}\int \cos(x) \cdot x \, dx &= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 \, dx \\ &= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \, dx && \text{Bereits vereinfachen} \\ &= \sin(x) \cdot x - (-\cos(x)) + C \\ &= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + C\end{aligned}$$

Summenregel / Differenzregel

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Rekursion

Explizite Definition $\rightarrow$ Rekursive Definition

Bsp: $a_n = 3n + 7$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 7 = 10 \quad d = a_2 - a_1 = 3 \cdot 2 + 7 - 10 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

$$a_n = 10 + 3 \cdot (n - 1)$$

Bsp: $a_n = n^2$

$$a_1 = 1$$

$$d: a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \rightarrow 2. \text{ Folge } (b_n), \text{ d.h. } d = b_n \text{ und } a_{n+1} = a_n + b_n$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad b_1 = a_2 - a_1 = 3 \quad b_d = a_2 - a_1 = 2$$

$$b_n = b_1 + b_d(n - 1) = 3 + 2(n - 1) = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

$$a_n = 1 + (2n + 1) \cdot (n - 1)$$