

Vorfahren Abgeschlossenheit:

1. Ungleichung / Gleichung / beides?

1.1 Ungleichung:

$\geq, \leq, <, >$

Höchstwahrscheinlich **kein** Unterraum!

Verletzt höchwahrscheinlich: **Skalare Multiplikation**

1.2 Gleichung:

$= 0$

Alle Vorfahren durchgehen, bis man **0=0** hat

1.3 Beides:

Höchstwahrscheinlich **bedingungs** verletzung bei der **skalaren Multiplikation**!

1. Räume:

1.1 Standard Räume:

• Im $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

• Im $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1.2 Im Matrizenraum:

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$

Für 2×2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1.3 Im Polynom-Raum (z.B. $\mathbb{P}_2$):

$p(x) = x_0 + x_1 + x_2 x$

$U_1 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$

1. Nullvektor:

$\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (0) - 2(0) + (0) = 0$

$0 = 0$

Somit Nullvektor enthalten

2. Addition:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\therefore ((x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3)) = (x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3)$

$x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 + x_3 + y_3 = x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 + x_3 + y_3$

$\therefore x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3 = x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3$

Somit gleich, daher ist die Addition abgeschlossen!

3. Skalare Multiplikation:

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Links:

$\therefore (\lambda(x_1 - 2x_2 + x_3)) = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$

Rechts:

$\therefore \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3) = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$

Somit: $\lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3 = \lambda x_1 - \lambda 2x_2 + \lambda x_3$

$\therefore \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3) = \lambda(x_1 - 2x_2 + x_3)$

Somit **hier** Skalare Multiplikation abgeschlossen

$\therefore U_1$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ✓

$U_2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0 \}$

1. Nullvektor:

Bedingung: $\mathbb{R}^+$

1. Nullvektor:

$\mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore 0 \geq 0$

Somit Nullvektor enthalten

2. Addition:

$f(x+y) \geq 0$

$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

$x_1 + y_1 \geq 0$

Für x_1 und y_1 in $\mathbb{R}^+$ ist die Addition **Abgeschlossen**

3. Skalare Multiplikation:

$f(\lambda x) \geq 0$

$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

Für $x_1 \in \mathbb{R}^+$ ist skalare Multiplikation **Abgeschlossen** ✓

Wenn $x_1 \notin \mathbb{R}^+$ ist gegenbeispiel, somit ist die Skalare Multiplikation **nicht Abgeschlossen** ✓

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1. Nullvektor:

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=0 \quad b=0$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Somit Nullvektor enthalten

2. Abgeschlossenheit unter Addition:

$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & 0 + 0 \end{pmatrix}$

$\therefore a = a_1 + a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$
 $b = b_1 + b_2$

$\therefore$ Somit **Abgeschlossen** unter Addition

3. Abgeschlossenheit unter skalare Multiplikation:

$A_1 \cdot \lambda = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix}, a = \lambda a, b = \lambda b$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Somit **Abgeschlossen** unter skalare Multiplikation

$\therefore$ Somit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

Aufgabentypen (Spaltenvektoren):

Typ-1: Homogenes Gleichungssystem

Beispiele: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
oder
 $x_1 = x_2$

ZSM: Für **das** zu ein Vektorraum, alle 3 Schritte anwenden!

Typ-2: Inhomogenes Gleichungen:

Beispiele: $x_1 + x_2 = 5$
oder
 $x_1 + x_2 = -1$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Null element.

Typ-3: Ungleichungen:

Beispiele: $x_1 \geq 0$
oder
 $x_2 \geq 3$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Skalare Multiplikation

Typ-4: Nicht lineare Terme:

Beispiele: $x_1 + x_2 = 0$
oder
 $x_3 = x_1^2$

ZSM: Verletzt wahrscheinlich Addition

Akten:

1. Spaltenvektoren:

$\mathbb{R}^5 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

2. Matrizenräume $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$

3. Polynom-Räume $\mathbb{P}_n$:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
 $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

Lösungsmenge Vektoren:

Beispiel: $U_2 = \{ x_1 - 5x_2 = 0 \}$

1. Variabel suchen:

$\rightarrow$ Ohne verfahren der regeln!

2. Variablen:

$x_1 - 5x_2 = 0 \mid +5x_2$

$x_1 = 5x_2$

3. Einfügen:

Standard Vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

4. Vereinfachen:

$\therefore \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\therefore x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Umbenennen und Lösungsmenge:

$x_2 = \lambda, x_3 = \mu$

$U = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabentypen (Matrizen-Räume):

Typ-1: Spaltenvektor

Beispiel: $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

ZSM: Ist ein Unterraum.

Typ-2: Nullmatrix

Beispiel: $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

ZSM: Scheitert bei Nullmatrix.

Typ-3: Produkt

Beispiel: $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & a \cdot b \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

ZSM: Scheitert bei Addition.

Typ-4: Determinante

Beispiel: $U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) = 0 \right\}$

ZSM: Scheitert bei Addition.

Typ-5: Ungleichung

Beispiel: $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid a_1 \geq 0 \right\}$

ZSM: Scheitert bei skalare Multiplikation

Lösungsmenge Matrizen:

Beispiel: $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1. Spalte:

$\therefore \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Zeilenmenge:

$\therefore a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Zeilen und Spalte:

$\therefore a = \lambda, \mu = b$

$\therefore \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore U = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Dimension: $\dim(U) = 2$

$\rightarrow$ zwei frei variablen

Aufgabentypen (Polynomräume):

Typ-1: Summe

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_2 = 1 \}$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-2: Keine

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 - 3a_1 + a_2 = 0 \}$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-3: Konstante

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 - a_1 = 5 \}$

ZSM: Scheitert bei Multiplikation

Typ-4: Produkt

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0 \cdot a_1 = 0 \}$

ZSM: Scheitert bei Addition

Typ-5: Ungleichung

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 \geq 0 \}$

ZSM: Scheitert bei Skalare Multiplikation

Lösungsmenge Polynome:

Beispiel: $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 - 3a_2 + a_3 = 0 \}$

1. Lösungsmenge aufstellen:

$\therefore a_0 - 3a_1 + a_2 = 0$

$a_0 = 3a_1 - a_2$

2. Ansatz:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\therefore p(x) = (3a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2$

3. Spalten:

$\therefore a_1 (3 + x) + a_2 (-1 + x^2)$

4. Umbenennen und Basis:

$\therefore a_1 = \lambda, a_2 = \mu$

$\therefore U = \left\{ \lambda (3 + x) + \mu (-1 + x^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Basis: $\left\{ 3 + x, -1 + x^2 \right\}$

Dimension = 2

$\rightarrow$ Anzahl der Basis elemente

Lineare Abhängigkeit: Vektoren

Vorgehen:

Wenn quadratische Matrix möglich:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinante einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus: 3x3

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n-reihige Determinante:

unterdeterminante $\det(A_{21})$

als a_{12} a_{13} a_{14}

als a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}

als a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}

als a_{41} a_{42} a_{43} a_{44}

als a_{51} a_{52} a_{53} a_{54}

als a_{61} a_{62} a_{63} a_{64}

als a_{71} a_{72} a_{73} a_{74}

als a_{81} a_{82} a_{83} a_{84}

als a_{91} a_{92} a_{93} a_{94}

als a_{101} a_{102} a_{103} a_{104}

als a_{111} a_{112} a_{113} a_{114}

als a_{121} a_{122} a_{123} a_{124}

als a_{131} a_{132} a_{133} a_{134}

als a_{141} a_{142} a_{143} a_{144}

als a_{151} a_{152} a_{153} a_{154}

als a_{161} a_{162} a_{163} a_{164}

als a_{171} a_{172} a_{173} a_{174}

als a_{181} a_{182} a_{183} a_{184}

als a_{191} a_{192} a_{193} a_{194}

als a_{201} a_{202} a_{203} a_{204}

als a_{211} a_{212} a_{213} a_{214}

als a_{221} a_{222} a_{223} a_{224}

als a_{231} a_{232} a_{233} a_{234}

als a_{241} a_{242} a_{243} a_{244}

als a_{251} a_{252} a_{253} a_{254}

als a_{261} a_{262} a_{263} a_{264}

als a_{271} a_{272} a_{273} a_{274}

als a_{281} a_{282} a_{283} a_{284}

als a_{291} a_{292} a_{293} a_{294}

als a_{301} a_{302} a_{303} a_{304}

als a_{311} a_{312} a_{313} a_{314}

als a_{321} a_{322} a_{323} a_{324}

als a_{331} a_{332} a_{333} a_{334}

als a_{341} a_{342} a_{343} a_{344}

als a_{351} a_{352} a_{353} a_{354}

als a_{361} a_{362} a_{363} a_{364}

als a_{371} a_{372} a_{373} a_{374}

als a_{381} a_{382} a_{383} a_{384}

als a_{391} a_{392} a_{393} a_{394}

als a_{401} a_{402} a_{403} a_{404}

als a_{411} a_{412} a_{413} a_{414}

als a_{421} a_{422} a_{423} a_{424}

als a_{431} a_{432} a_{433} a_{434}

als a_{441} a_{442} a_{443} a_{444}

als a_{451} a_{452} a_{453} a_{454}

als a_{461} a_{462} a_{463} a_{464}

als a_{471} a_{472} a_{473} a_{474}

als a_{481} a_{482} a_{483} a_{484}

als a_{491} a_{492} a_{493} a_{494}

als a_{501} a_{502} a_{503} a_{504}

als a_{511} a_{512} a_{513} a_{514}

als a_{521} a_{522} a_{523} a_{524}

als a_{531} a_{532} a_{533} a_{534}

als a_{541} a_{542} a_{543} a_{544}

als a_{551} a_{552} a_{553} a_{554}

als a_{561} a_{562} a_{563} a_{564}

als a_{571} a_{572} a_{573} a_{574}

als a_{581} a_{582} a_{583} a_{584}

als a_{591} a_{592} a_{593} a_{594}

als a_{601} a_{602} a_{603} a_{604}

als a_{611} a_{612} a_{613} a_{614}

als a_{621} a_{622} a_{623} a_{624}

als a_{631} a_{632} a_{633} a_{634}

als a_{641} a_{642} a_{643} a_{644}

als a_{651} a_{652} a_{653} a_{654}

als a_{661} a_{662} a_{663} a_{664}

als a_{671} a_{672} a_{673} a_{674}

als a_{681} a_{682} a_{683} a_{684}

als a_{691} a_{692} a_{693} a_{694}

als a_{701} a_{702} a_{703} a_{704}

als a_{711} a_{712} a_{713} a_{714}

als a_{721} a_{722} a_{723} a_{724}

als a_{731} a_{732} a_{733} a_{734}

als a_{741} a_{742} a_{743} a_{744}

als a_{751} a_{752} a_{753} a_{754}

als a_{761} a_{762} a_{763} a_{764}

als a_{771} a_{772} a_{773} a_{774}

als a_{781} a_{782} a_{783} a_{784}

als a_{791} a_{792} a_{793} a_{794}

als a_{801} a_{802} a_{803} a_{804}

als a_{811} a_{812} a_{813} a_{814}

als a_{821} a_{822} a_{823} a_{824}

als a_{831} a_{832} a_{833} a_{834}

als a_{841} a_{842} a_{843} a_{844}

als a_{851} a_{852} a_{853} a_{854}

als a_{861} a_{862} a_{863} a_{864}

als a_{871} a_{872} a_{873} a_{874}

als a_{881} a_{882} a_{883} a_{884}

als a_{891} a_{892} a_{893} a_{894}

als a_{901} a_{902} a_{903} a_{904}

als a_{911} a_{912} a_{913} a_{914}

als a_{921} a_{922} a_{923} a_{924}

als a_{931} a_{932} a_{933} a_{934}

als a_{941} a_{942} a_{943} a_{944}

als a_{951} a_{952} a_{953} a_{954}

als a_{961} a_{962} a_{963} a_{964}

als a_{971} a_{972} a_{973} a_{974}

als a_{981} a_{982} a_{983} a_{984}

als a_{991} a_{992} a_{993} a_{994}

als a_{1001} a_{1002} a_{1003} a_{1004}

als a_{1011} a_{1012} a_{1013} a_{1014}

als a_{1021} a_{1022} a_{1023} a_{1024}

als a_{1031} a_{1032} a_{1033} a_{1034}

als a_{1041} a_{1042} a_{1043} a_{1044}

als a_{1051} a_{1052} a_{1053} a_{1054}

als a_{1061} a_{1062} a_{1063} a_{1064}

als a_{1071} a_{1072} a_{1073} a_{1074}

als a_{1081} a_{1082} a_{1083} a_{1084}

als a_{1091} a_{1092} a_{1093} a_{1094}

als a_{1101} a_{1102} a_{1103} a_{1104}

als a_{1111} a_{1112} a_{1113} a_{1114}

als a_{1121} a_{1122} a_{1123} a_{1124}

als a_{1131} a_{1132} a_{1133} a_{1134}

als a_{1141} a_{1142} a_{1143} a_{1144}

als a_{1151} a_{1152} a_{1153} a_{1154}

als a_{1161} a_{1162} a_{1163} a_{1164}

als a_{1171} a_{1172} a_{1173} a_{1174}

als a_{1181} a_{1182} a_{1183} a_{1184}

als a_{1191} a_{1192} a_{1193} a_{1194}

als a_{1201} a_{1202} a_{1203} a_{1204}

als a_{1211} a_{1212} a_{1213} a_{1214}

als a_{1221} a_{1222} a_{1223} a_{1224}

als a_{1231} a_{1232} a_{1233} a_{1234}

als a_{1241} a_{1242} a_{1243} a_{1244}

als a_{1251} a_{1252} a_{1253} a_{1254}

als a_{1261} a_{1262} a_{1263} a_{1264}

als a_{1271} a_{1272} a_{1273} a_{1274}

als a_{1281} a_{1282} a_{1283} a_{1284}

als a_{1291} a_{1292} a_{1293} a_{1294}

als a_{1301} a_{1302} a_{1303} a_{1304}

als a_{1311} a_{1312} a_{1313} a_{1314}

als a_{1321} a_{1322} a_{1323} a_{1324}

als a_{1331} a_{1332} a_{1333} a_{1334}

als a_{1341} a_{1342} a_{1343} a_{1344}

als a_{1351} a_{1352} a_{1353} a_{1354}

als a_{1361} a_{1362} a_{1363} a_{1364}

als a_{1371} a_{1372} a_{1373} a_{1374}

als a_{1381} a_{1382} a_{1383} a_{1384}

als a_{1391} a_{1392} a_{1393} a_{1394}

als a_{1401} a_{1402} a_{1403} a_{1404}

als a_{1411} a_{1412} a_{1413} a_{1414}

als a_{1421} a_{1422} a_{1423} a_{1424}

als a_{1431} a_{1432} a_{1433} a_{1434}

als a_{1441} a_{1442} a_{1443} a_{1444}

als a_{1451} a_{1452} a_{1453} a_{1454}

als a_{1461} a_{1462} a_{1463} a_{1464}

als a_{1471} a_{1472} a_{1473} a_{1474}

als a_{1481} a_{1482} a_{1483}

Lineare Abbildung: Verfahren Vektor

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1. Null element:

$\vec{x} \mapsto f_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x=y$
 $y=0$
 $\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Nullvektor vorhanden

2. Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Links:

$f_3 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Vergleich:

$\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$

Somit Additivität abgeschlossen

3. Homogenität:

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda$

Links:

$f_3 \left(\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\lambda f_3 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit Homogen

$\therefore$ **Somit ist f_3 linear**

Lineare Abbildung: Verfahren Matrix

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 4x-0 \end{pmatrix}$

1. Null element:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 - 2 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit Nullvektor enthalten

2. Additivität:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(A+B) = f(A) + f(B)$

Links:

$\therefore \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Links = Rechts

$\therefore$ **Somit Additivität abgeschlossen**

3. Homogenität:

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Links:

$\lambda \begin{pmatrix} x & -2y \\ 4x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & -2\lambda y \\ 4\lambda x & 0 \end{pmatrix}$

Rechts:

$\lambda \begin{pmatrix} x & -2y \\ 4x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & -2\lambda y \\ 4\lambda x & 0 \end{pmatrix}$

Links = Rechts

$\therefore$ **Somit Homogenität bewiesen**

$\therefore$ **Somit ist f eine lineare Abbildung**

Lineare Abbildung: Verfahren Trig. Funk.

$f_S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f_S(x) = \sin(x)$

1) Null element:

$\mathbb{R} = 0$
 $\rightarrow f_S(0) = \sin(0)$

$f_S(0) = 0$

Bild vom Nullvektor:

$0 = \checkmark$

2) Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(90^\circ + 90^\circ) = f(90^\circ) + f(90^\circ)$

Links:

$f(90^\circ + 90^\circ) = \sin(180^\circ) = 0$

Rechts:

$f(90^\circ) + f(90^\circ) = 1 + 1 = 2$

$0 \neq 2$

Additivität gescheitert, somit Abbildung nicht linear!

Lineare Abbildung und Definitionsbereich

$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} \mapsto f_1(\vec{x}) = |\vec{x}|$

Bild berechnen:

$|\vec{x}| \Leftrightarrow \text{Länge}$

$\therefore \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

Das Bild ist $\sqrt{2}$

Nullvektor:

$\mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore f_1(\vec{x}) = \sqrt{0^2 + 0^2}$

$f_1(\vec{x}) = 0$

Bestanden

Additivität:

2 Test Vektoren im $\mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Links:

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + 1 = 2$

$\sqrt{2} \neq 2$

Additivität gescheitert

Somit ist die Abbildung nicht linear

Lineare Abbildung und Def. Bereich

$f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto f_2(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$, wobei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

und $\vec{v} = \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bild berechnen:

$\therefore \vec{a} = \vec{e}_2$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = a_2$

Das Bild ist von $f_2 = \vec{a} \cdot \vec{x}$ ist a_2

Additivität:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Links:

$a \cdot f(x+y)$

$\therefore a \cdot x + a \cdot y$

Rechts:

$a(f(x) + f(y))$

$\therefore a \cdot x + a \cdot y$

$\rightarrow$ **Links = Rechts**

Additivität bewiesen

Homogenität:

$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

Links:

$a \cdot f(\lambda \vec{x})$

$a \cdot (\lambda \vec{x})$

$\rightarrow \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$

Rechts:

$a \cdot (\lambda f(\vec{x}))$

$\therefore a \cdot \lambda \vec{x} \rightarrow \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$

$\therefore \lambda (\vec{a} \cdot \vec{x})$ **Somit Homogenität bewiesen**

$\Rightarrow$ **Somit ist f_2 linear**

Lineare Abbildung Verfahren: Polynom

Erhält man: $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$\rightarrow$ So wandelt man dieses Polynom in einen Vektor um!

$\therefore [2x^2 + 3x + 1]$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ **Dieser Vektor für Vektoren folgen**

Basis:

Vorgehen um Basen zu finden:

1. erweiterte Matrix

2. Gauß-Verfahren $\rightarrow$ ZSF

3. Führende 1 $\rightarrow$ Anzahl bestimmt Rang-dim

Es braucht so viel Vektoren für eine Basis wie die dim.

Bilden die Vektoren eine Basis?

$\rightarrow$ **Vektoren müssen linear unabhängig sein**

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ In erweiterte Koeffizientenform

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ In ZSF bringen

$r = n$: Linear unabhängig

$r < n$: Linear abhängig

Dimension (je nach Art):

Vektoren:

Allgemein:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \dim(3)$

$\rightarrow$ **Dimension $\rightarrow$ Anzahl der Zeilen**

Standard basis:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Polynome:

Allgemein:

$ax^2 + bx + c$

Dimension $\rightarrow$ Grad + 1

Standard basis $\rightarrow$ Monombasis $(1, x, x^2)$

3. Matrizen:

Allgemein:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dimension: Zeilen + Spalten = Dimension

Standardbasis:

Für 2×2 zum Beispiel:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(V_1) = 2$

$\rightarrow$ **Beschreibt eine Ebene**

Rang der Matrix: $r = \text{rang}(A)$; n Anzahl Spalten

$r \geq 0$ & $r \leq m$ gilt immer

min 1. Lösung:

$r = m$

$r < m$ & $b_k = 0$

eindeutig 1. Lösung:

$\rightarrow r = n$

unendlich viele Lösungen:

$\rightarrow r < n$

keine Lösung:

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

Lösungsmenge eines Gleichungssystems:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(A) = 3$

$\text{rang}(A|b) = 4$

$\rightarrow$ keine Lösung

$b_k = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$

$b_k \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

$r = n$ 1. Lösung

$r < n$ unendlich viele Lösungen

$r < n$ keine Lösung

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+3y \end{pmatrix}$ **Vektor**

Input: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 Output: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Darstellungsmatrix Dimension: Output x Input
 $\therefore 2 \times 3$ (Zeilen x Spalten)

$\therefore \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+3y \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Input: 2×2
 Output: 2×2 **Matrix**

Darstellungsmatrix:

Output:
 $8 \times 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow 4$ Variablen

Input: $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow 4$ Variablen

$\therefore A \Rightarrow 4 \times 4$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Vorschrift: $f: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$

$$f(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (3a+b)x + (c-a)$$

Input: $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **Polynom**

Output: $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Darstellungsmatrix Dimension:

Output x Input

Input:

Kommen aus $\mathbb{P}_2 \Rightarrow x^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Zeilen

Output:

Kommen aus $\mathbb{P}_2 \Rightarrow x^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Spalten

Darstellungsmatrix:

Somit, $A = 3 \times 3$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbildungsverfahren und Darstellungsmatrix:

Die Aufgabe:

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ welche wie folgt definiert ist:
 $f(ax^2 + bx^2 + cx + d) = (2a-c)x^2 + (3a+b)x + (a-b)$

Input: $\mathbb{P}_2 \rightarrow x^2$ **Polynom**

Output: $\mathbb{P}_2 \rightarrow x^2$

Darstellungsmatrix Dimension:

Output x Input

Input:

Kommen aus $\mathbb{P}_2 \Rightarrow x^2$

$\therefore 3+1=4$

$\therefore 4$ Start Variablen $\rightarrow 4$ Zeilen

Output:

Output:

Kommen aus $\mathbb{P}_2 \Rightarrow x^2$

$\therefore 2+1=3$

$\therefore 3$ Start Variablen $\rightarrow 3$ Spalten

Darstellungsmatrix:

Somit, $A = 4 \times 3$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verfahren: Gehört zu Ker(f)

1. Bedingung auslesen

2. Darstellungsmatrix

3. $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

4. Wenn Ergebnis Nullvektor:
 $\rightarrow$ Vektor $\vec{v}$ gehört zu $\text{Ker}(f)$

Wenn Ergebnis $\neq$ Nullvektor:
 $\rightarrow$ Vektor $\vec{v}$ gehört nicht zu $\text{Ker}(f)$

Gehört pol zu Kern von f?

Bedingung:

1. Darstellungsmatrix

2. Kern

Aufgabe 3. (2+2 = 4 Punkte)

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} 2a+c \\ a-b \end{pmatrix}$$

1) $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Input: $\mathbb{P}_2$

Output: $\mathbb{R}^2$

$2+1=3$

Output: $\mathbb{R}^2$

Output x Input = Darstellungsmatrix

2×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit liegt das Polynom im Kern

Verfahren: Ker(f), Basis und Dimension

1. Darstellungsmatrix

2. $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

3. Gauss ZSF

4. Rang = führende Einsen

Dimension Basis = Dimension des Definitionsbereichs

Formel: Dimension - Rang = $\dim(\text{Ker}(f))$

$\rightarrow$ Die Info nutzen für Basisformation

Fall 1: $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ (keine freien Variablen)

Wenn: Gauss $\rightarrow$ eindeutige Lösung ($r=n$)

Lösungsmenge: $\text{Ker}(f) = \{0\}$

$\rightarrow$ Es existiert keine Basis (keine Menge)

$\rightarrow$ Abbildung ist injektiv

Fall 2: $\dim(\text{Ker}(f)) > 0$ (Es gibt freie Variablen)

Wenn: Gauss $\rightarrow$ mind. eine Lösung mehr

variablen, viele Lösungen

5. Lösungsmenge vom Gauss

Freie Variable:

$$u = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Ohne freie Variable:

$$\text{Ker}(f) = \{0\}$$

6. Die Basis:

Die Basis besteht aus den Vektoren

innerhalb der Lösungsmenge

Freie Variable

$$\text{Somit Basis Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ohne freie Variable

$$\text{Somit Basis Ker}(f) = \{0\}$$

Verfahren: Gehört zu $\text{Im}(f)$

1. Bedingung auslesen

2. Darstellungsmatrix

3. Formel: $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

4. Wenn resultierender Vektor die Bedingung erfüllt kein Vektor $\in \text{Im}(f)$

1. Bedingung auslesen

$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

2. Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Formel: $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Auswertung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit $\vec{a} \in \text{Im}(f)$

Wann nutzen?

• Bestimmen Sie den $\text{Ker}(f)$ der linearen

Abbildung f

• Geben Sie eine Basis für $\text{Ker}(f)$ an

• Ermitteln Sie die Dimension des Kerns

• Untersuchen Sie, ob die Abbildung

injektiv ist

• Kern:

Die Menge aller Vektoren, welche auf Null

abgebildet werden, heißen Kern der Funktion f

$\text{Ker}(f)$ ist die Lösungsmenge des LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\text{Ker}(f)$ ist ein Unterraum von V

Vorgehen um $\text{Ker}(f)$ zu bestimmen:

1. Darstellungsmatrix A von f bestimmen

2. homogenes LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

3. Gauss-Jordan anwenden, $\text{Rang}(\text{Ker}(f))$ ermitteln

4. $\text{Ker}(f) = \text{Lösungsmenge LGS}$

5. $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Anzahl freie Variablen}$

Lösungsmenge als Vektoren:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungsmenge mit Parameter für freie Var:

für freie Variablen t einsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Für mehrere freie Variablen, dann

einmal jede Variable ausblenden

freie Variable bei Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Bijektivität:

Konditionen

• Matrix ist invertierbar

• $\det(A) \neq 0$

• Nur Nullvektor im Kern

• Alle Vektoren sind im Bild

• Jede Zeile hat eine Formel 1

• Dimension von Definitionsbereich = Dimension Wertebereich

Verfahren:

1. Dimension überprüfen:

Ist der Definitionsbereich und

Wertebereich von gleicher Dimension?

$$\text{z.B. } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{X} \quad \text{Nicht bijektiv}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \checkmark \quad \text{Wahrscheinlich}$$

2. Determinanten berechnen:

Wenn $\det(A) \neq 0$ somit bijektiv

• Determinante einer 2×2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

n-reihige Determinanten:

- unterdeterminant: $\det(A) < 0$

- überdeterminant: $\det(A) > 0$

- singulär: $\det(A) = 0$

• Mit Hilfe von Eigenschaft 5 in einer Zeile

oder Spalte alles 0 setzen bis auf 1 Zeile

Verfahren: $\text{Im}(f)$, Basis, Dimension

1. Darstellungsmatrix

2. $A \cdot \vec{x} = \text{Vektor}$

3. Gauss ZSF

4. Zeilen mit führenden Einsen auf

Original Darstellungsmatrix suchen

5. Basis entspricht der Spalten

wo die führenden Einsen sind

der ZSF

ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In der Darstellungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimension = Anzahl Vektoren

in der Basis

$$\therefore \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Spiegelung an Geraden

$\mathbb{R}^2$ Koordinatengleichung der Geraden $ax + by + c = 0$
 Normalenvektor von $g \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (falls nur Winkel bekannt)
 $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $A_S = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$
 Für die Gerade $-x + y = 0$ $A_S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$
 Achtung bei Verwenden der Formel das so machen: $(\vec{r}) - 2a\vec{n}$

Streckung

längs der X-Achse: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ umkehrt: $A = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Gestreckt: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Geometrische Interpretation

Checkliste zur Beschreibung:

- Die Art der Transformation: Was ist passiert? (Benutze Fachbegriffe wie Drehung, Spiegelung, Streckung oder Scherung).
- Die genauen Parameter: Wie stark oder wo ist es passiert?
 - Bei einer Drehung: Um welchen Winkel und in welche Richtung?
 - Bei einer Spiegelung: An welcher Achse/Geraden oder an welchem Punkt?
 - Bei einer Streckung: Um welchen Faktor?

Die Streckung erfolgt über einen Faktor. Der Faktor wird in der Aufgabe gegeben.

Alle Geometrischen Transformationen sind Lineare Abbildungen. Man verwendet diese Abbildungsmatrizen und multipliziert diese mit der Funktion um das gewünschte Resultat zu erhalten.

$A_{\text{gesamt}} = \text{Streckung} \cdot y\text{-Spiegelung} \cdot x\text{-Spiegelung}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Verlangt die Aufgabe mehrere Geometrische Transformationen, so fängt man die Multiplikation mit der letzten an.

Scherung

längs der X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

längs der Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
 Normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Drehung

Die Determinante einer Drehmatrix ist immer 1, somit bijektiv und umkehrbar (Invertierbar).

Wenn Winkel positiv:

Gegen den Uhrzeigersinn:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Wenn Winkel negativ:

Uhrzeigersinn:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Spiegelung x-Achse

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelung y-Achse

y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung: Nullpunkt für $\mathbb{R}^2$

Am Nullpunkt in Ebene $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektionen:

X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 XY-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 XZ-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 YZ-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Orthogonalprojektion auf Vektor $\vec{a}$:

Formel: $\text{fa}(\vec{b}) = \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Für 3x3 Matrix: $A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{a}^T$
 Für 2x2 Matrix: $A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y \\ a_x a_y & a_y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{a}^T$

Projektion xy Ebene

Projektion yz Ebene

Projektion auf y-Achse

Projektion $\propto$ z Ebene

Projektion auf x-Achse

Drehung um die Koordinatenachse im Raum:

um X-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

um Y-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

um Z-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + bi$	$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$	$z = r e^{i\varphi}$
$a = r \cos(\varphi)$	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$	
$b = r \sin(\varphi)$	mit $\Delta = \begin{cases} 0^\circ, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180^\circ, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

Quadrant	Realteil (a)	Imaginärteil (b)	Lage in der Ebene
1. Quadrant	positiv (+)	positiv (+)	oben rechts $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$
2. Quadrant	negativ (-)	positiv (+)	oben links $\varphi \in [90^\circ, 180^\circ]$
3. Quadrant	negativ (-)	negativ (-)	unten links $\varphi \in [180^\circ, 270^\circ]$
4. Quadrant	positiv (+)	negativ (-)	unten rechts $\varphi \in [270^\circ, 360^\circ]$

Winkelbestimmung:

2. Quadrant	1. Quadrant
$\psi \in (-90^\circ, 0^\circ]$	$\psi \in [0^\circ, 90^\circ)$
$\varphi \in (90^\circ, 180^\circ]$	$\varphi \in [0^\circ, 90^\circ)$
$\Rightarrow \Delta = 180^\circ$	$\Rightarrow \Delta = 0^\circ$

3. Quadrant	4. Quadrant
$\psi \in [0^\circ, 90^\circ)$	$\psi \in (-90^\circ, 0^\circ]$
$\varphi \in [180^\circ, 270^\circ)$	$\varphi \in (-90^\circ, 0^\circ]$
$\Rightarrow \Delta = 180^\circ$	$\Rightarrow \Delta = 0^\circ$

Quadrant	Lage der Zahl	Korrekturwinkel Δ	Ergebnis φ
1. Quadrant	$a > 0, b > 0$	$+0^\circ$	$\varphi = \psi$ $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$
2. Quadrant	$a < 0, b > 0$	$+180^\circ$	$\varphi = \psi + 180^\circ$ $\varphi \in [90^\circ, 180^\circ]$
3. Quadrant	$a < 0, b < 0$	$+180^\circ$	$\varphi = \psi + 180^\circ$ $\varphi \in [180^\circ, 270^\circ]$
4. Quadrant	$a > 0, b < 0$	$+360^\circ$	$\varphi = \psi + 360^\circ$ $\varphi \in [270^\circ, 360^\circ]$

Quadratische Gleichung auflösen:

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

1. Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13$$

$$D = -36$$

2. Anwendung Mitternachtsformel:

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

$$2 \cdot a$$

$$\Rightarrow \frac{-(-4) \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

3. Umwandlung komplexe Form:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} \quad | \quad \sqrt{-1} = i$$

$$\Rightarrow i\sqrt{36}$$

4. Anwendung in Mitternachtsformel:

$$\frac{-(-4) \pm i\sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{4}{2} + i\sqrt{36} \Rightarrow 2 + i\sqrt{36}$$

$$z_2 = \frac{4}{2} - i\sqrt{36} \Rightarrow 2 - i\sqrt{36}$$

Gleichung in kartesischer Form lösen: Für $a = 2$

$$z^2 = a + bi \quad | \quad a = 2$$

$$z = a + bi$$

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$$a^2 - b^2 = 3 \quad | \quad 2ab = 4$$

$$a = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3 \quad | \quad + b^2$$

$$\frac{4}{b^2} = 3 + b^2 \quad | \quad \cdot b^2$$

$$4 = 3b^2 + b^4 \quad | \quad - 4$$

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$b^2 = 1 \quad | \quad b = \pm 1$$

$$a = \frac{2}{b} = \pm 2$$

$$z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$$

Substitution mit $c = b^2$ | Gewinnumformung

$$c^2 + 3c - 4 = 0$$

$$c_1 = 1, c_2 = -4$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$b^2 = -4 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Scheinlösungen eliminieren

$$b_1, b_2 \text{ und } a_1, a_2 \text{ ausrechnen}$$

$$b_1 = 1, b_2 = -1$$

$$a_1 = 2, a_2 = 2$$

$$z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$$

In kartesischer Form:

$$W = \frac{i}{1 + \frac{a}{s+i}}$$

$$W = \frac{i}{1 + \frac{2}{s+i}} \cdot \frac{s-i}{s-i}$$

$$W = \frac{i(s-i)}{(s+i)(s-i)}$$

$$W = \frac{i(s-i)}{s^2 + 1}$$

$$W = \frac{i(s-i)}{s^2 + 1}$$

Die ersten binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ Binom})$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ Binom})$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{ Binom})$$

$$z^2 = 3 + 4i$$

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$$a^2 - b^2 = 3 \quad | \quad 2ab = 4$$

$$a = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3$$

$$\frac{4}{b^2} = 3 + b^2$$

$$4 = 3b^2 + b^4$$

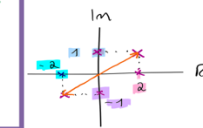
$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$b^2 = 1 \quad | \quad b = \pm 1$$

$$a = \frac{2}{b} = \pm 2$$

$$z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$$



Aufgabe 23. Bestimmen Sie die Wurzeln der folgenden Gleichungen, indem Sie sie mit der kartesischen Form auflösen.

$$a) z^2 = 3 + 4i$$

Aufgabe 19. Bestimmen Sie die Wurzeln der folgenden Gleichungen:

$$a) z^3 + 3z - 3 = 0$$

$$z = 1$$

$$z^3 + 3z - 3 = 0 \quad | \quad z = 1$$

$$1 + 3 - 3 = 0$$

$$z = 1$$

$$z^3 + 3z - 3 = 0 \quad | \quad z = 1$$

$$1 + 3 - 3 = 0$$

$$z = 1$$

$$z^3 + 3z - 3 = 0 \quad | \quad z = 1$$

$$1 + 3 - 3 = 0$$

$$z = 1$$

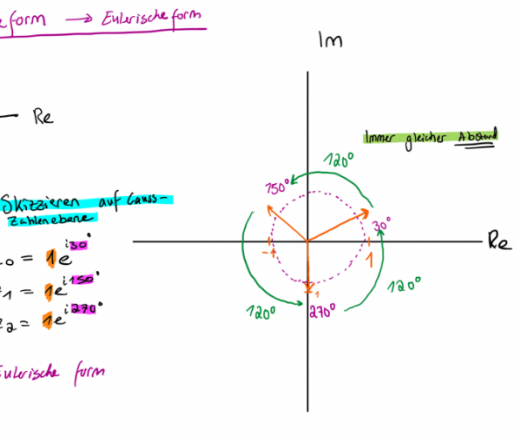
1. Betrag r und Argument φ ausrechnen

$$z^1 = 0 + 1i$$

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ$$

$$z = 1 \cdot e^{i90^\circ} = i$$



Aufgabe 3: Komplexe Gleichungen (8 Punkte)
Bestimmen Sie alle die Lösungen der Gleichung
 $z^2 - 27i = 0$
Geben Sie die Lösungen in der Eulerschen Form ($z = re^{i\varphi}$) an und skizzieren Sie diese grob
gedächtnislich (oder auf Papier) in der Gaußschen Zahlenebene.

$$z^2 = 0 - 27i$$

1) Eulersche form bestimmen

Betrug:

$$r = \sqrt{0^2 + (-27)^2}$$

$$r = 27$$

$$\Rightarrow \text{realteil} = 0 \quad \text{Imaginär} = -27i \quad \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ b < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = 270^\circ$$

Speziellfall:

- $a = 0$ und $b > 0$ (Pfeil zeigt nach oben): Winkel ist 90°
- $a = 0$ und $b < 0$ (Pfeil zeigt nach unten): Winkel ist 270° (oder -90°)
- $a > 0$ und $b = 0$ (Pfeil zeigt nach rechts): Winkel ist 0° (oder 360°)
- $a < 0$ und $b = 0$ (Pfeil zeigt nach links): Winkel ist 180°

$$\text{Somit} \Rightarrow z^2 = 27e^{i270^\circ}$$

2) Wurzeln bestimmen

$$r_{\text{neu}} = \sqrt[n]{r_{\text{alt}}}$$

$$r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{27}$$

$$r_{\text{neu}} = 3$$

$n=3$, somit

$$\varphi_k = \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, 2$$

Für $k=0$:

$$\varphi_0 = \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3}$$

$$\varphi_0 = 90^\circ$$

Für $k=1$:

$$\varphi_1 = \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3}$$

$$\varphi_1 = 210^\circ$$

Für $k=2$:

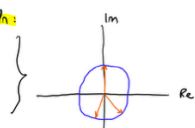
$$\varphi_2 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3}$$

3) Fertige Wurzeln:

$$z_1 = 3e^{i90^\circ}$$

$$z_2 = 3e^{i210^\circ}$$

$$z_3 = 3e^{i330^\circ}$$



$z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$ Gesucht: Wurzeln der Gleichung

1) Umwandlung kartesischer form $\rightarrow$ eulische form

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore r = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\therefore \varphi = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = 60^\circ$$

$$\therefore \varphi = 60^\circ + \Delta^\circ$$

$$\therefore \Delta^\circ = 0^\circ \rightarrow \text{Nach Tabelle:}$$

$$\therefore \varphi = 60^\circ + 0^\circ \quad a \text{ und } b \text{ verglichen}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

2) Eulersche form

$$z^4 = 16e^{i60^\circ}$$

3) Wurzeln ziehen:

$$z^4 = 16e^{i60^\circ} \quad | \sqrt[4]{}$$

$$\therefore r = \sqrt[4]{16}$$

$$\therefore r = 2$$

$n=4$

$$\varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Für $k=0$:

$$\varphi_0 = \frac{60^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 15^\circ$$

Für $k=1$:

$$\varphi_1 = \frac{60^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 105^\circ$$

Für $k=2$:

$$\varphi_2 = \frac{60^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 195^\circ$$

Für $k=3$:

$$\varphi_3 = \frac{60^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 285^\circ$$

4) Lösungen:

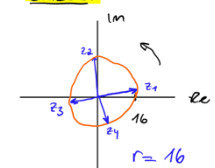
Skizze:

$$z_1 = 2e^{i15^\circ}$$

$$z_2 = 2e^{i105^\circ}$$

$$z_3 = 2e^{i195^\circ}$$

$$z_4 = 2e^{i285^\circ}$$



Komplexe Zahl: Potenz

$$z = (-3 + \sqrt{3}i)^4 e^{i150^\circ}$$

1) $\rightarrow$ eulische form

$$-3 + \sqrt{3}i \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$r = 2\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \Delta$$

$$\varphi = -30^\circ + \Delta \quad | \quad a < 0, b > 0 \Rightarrow \Delta = 180^\circ$$

$$\varphi = -30^\circ + 180^\circ$$

$$\varphi = 150^\circ$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}e^{i150^\circ}$$

$$\therefore (2\sqrt{3}e^{i150^\circ})^4$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{3})^4 \cdot e^{i4 \cdot 150^\circ}$$

$$\Rightarrow 144 \cdot e^{i600^\circ}$$

2) Zusammenführen

$$z = 144e^{i600^\circ} \cdot e^{i150^\circ}$$

$$z = 144 \cdot 1 \cdot e^{i600^\circ + i150^\circ}$$

$$z = 144e^{i750^\circ}$$

$$\left| \begin{array}{l} 750 + 360 = 2.083 \\ 750 - (2 \cdot 360) = 30^\circ \end{array} \right.$$

3) Umwandeln:

$$z = 144 (\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ))$$

Allgemein: $Az = \lambda z$

Für $z \in \mathbb{R}^2$: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrix multiplikation}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda \text{ ausklammern:}$$

$$\therefore -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit Eigenwert } \lambda = -2$$

Für $z \in \mathbb{R}^2$: z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 37 \\ 9 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrix multiplikation}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda \text{ ausklammern}$$

$$\text{Somit Eigenwert } \lambda = 0$$

Für $z \in \mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matrix multiplikation}$$

$$\therefore \dots$$

$$\rightarrow \lambda \text{ ausklammern}$$

$$\text{Somit Eigenwert } \lambda = \dots$$

$$\text{Matrix Multiplikation:}$$

$$\begin{array}{c|c} A & z \\ \hline & \end{array}$$

$$\text{Matrix Multiplikation:}$$

$$\begin{array}{c|c} A & z \\ \hline & \end{array}$$

$$\text{Matrix Multiplikation:}$$

$$\begin{array}{c|c} A & z \\ \hline & \end{array}$$

1) Eigenwerte finden

$$\text{Formel: } \det(A - \lambda I) = 0$$

2) Eigenraum bestimmen

$$\text{Formel: } (A - \lambda I)z = 0$$

2.1: Einsetzen der Elemente

2.2: Gauß und ZSF

2.3: Geometrische Interpretation bestimmen

Lösungsmenge als Vektoren:

$$\mathbb{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \in \mathbb{R}$$

Lösungsmenge mit Parameter für freie Var:

Für freie Variablen c einsetzen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

Für mehrere freie Variablen dann einfach jede Variable ausklammern

3) Probe: (Nur ein check)

$$\text{Formel: } A \cdot v_k = \lambda_k \cdot v_k$$

4) Vielfachheiten checken

4.1: Geometrische Vielfachheit:

Anzahl der Vektoren in der Geometrischen Interpretation

Lösung: $y = \dots$

4.2: Algebraische Vielfachheit:

Nr der Eigenwerte einer einfachen oder doppelten Nullstelle

Wenn Einfach dann:

$$\lambda = 1$$

Wenn Doppelt dann:

$$\lambda = 2$$

5) Bedingung prüfen:

$$\text{Bed. } 1 \leq y \leq n$$

y und n einsetzen:

Wenn bestanden: Rechnungsvorgehen korrekt

Wenn verletzt: Rechnungsvorgehen nicht korrekt

Spektrum (0): Menge aller Eigenwerte

$$\therefore \sigma(A) = \{\dots, \dots\}$$

Spektralradius (ρ):

Eigenwert der am weitesten von der 0 entfernt ist, egal ob + oder -

$$\text{z.B. Eigenwerte: } \lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = -3$$

$$\therefore \text{Berechnung: } \rho(A) = \max(|3|, |-3|)$$

$$\text{Berechnung: } \rho(A) = \max(3, 3)$$

$$\text{Somit } \rho(A) = 3$$

- Frage-Typ A: Überprüfen Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist. $\rightarrow$ Hier reicht den Vielfachheiten-Check ($\gamma = \mu$) als vollständiger Beweis völlig aus!
- Frage-Typ B: Diagonalisieren Sie die Matrix A und geben Sie die Matrizen P und D an. $\rightarrow$ Hier reicht das bloße Wissen nicht. Die Dozenten möchte die konkreten, fertig ausgefüllten Matrizen P und D mit den echten Zahlen auf deinem Prüfungsbogen sehen.

Diagonalisierung

Achtung: Eine Matrix ist diagonalisierbar falls:

$$\gamma = \mu$$

$$\text{für alle Eigenwerte der Matrix}$$

Für tiefere analyse:

Ablauf Allgemein: Diagonalisierung

1) Eigenwerte und Matrix D bestimmen

1.1 Berechnung der charakteristischen Gleichung

$$\text{Formel: } \det(A - \lambda I) = 0$$

Daraus kommen die Eigenwerte der Matrix

$\therefore$ Also kann hiermit die Diagonalmatrix aufstellen

Für eine $n \times n$ Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Bedingungen:

Wenn eine $n \times n$ Matrix benutzt wurde so γ_k die Matrix diagonalisierbar waren es verschiedene Eigenwerte gibt

2) Eigenvektoren und Matrix P bestimmen:

Eigenwerte in die Gleichung einsetzen:

$$(A - \lambda I)z = 0$$

Achtung beim Gleichung lösen immer zu λ mit dem oben z aufpassen also z_1 und dann so weiter

$\therefore$ Das gelöste GLS liefert 2 Werte, die 2 Werte bilden den Eigenvektor:

$$\text{Eigenvektor: } \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Dieses Verfahren wird für jeden Eigenwert einmal wiederholt

$\therefore$ Matrix P wird durch das Kombinieren der Eigenvektoren kreiert:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sollten hier Brüche stehen so kann man diese so wie sie sind lassen

3) Finale Bedingung:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \text{ oder umgekehrt } \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$\therefore$ Die Matrizen werden eingesetzt, sollte die Matrix auf die oben schon gestellt wird da γ_k die Matrix diagonalisierbar

Spur:

Weg 1 (über die Original Matrix):

$$\text{z.B. } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit: Addition der Elemente auf der Hauptdiagonalen von Links nach Rechts unten

$$\therefore \text{Spur}(A) = -1 + 1 = 0$$

Weg 2 (über die Eigenwerte):

$$\text{z.B. } \lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = -3$$

Somit: Einzelne Eigenwerte nehmen und mit einem algebraischen Vielfachheit multiplizieren und dann Ergebnis addieren

Satz 4.5.2:

$$\text{Spur}(A) = \mu_1 \cdot \lambda_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \mu_n \cdot \lambda_n$$

Ist eine Matrix invertierbar?

Determinante und LGS:

- $\det(A) \neq 0$
- Die Spaltenvektoren A sind linear unabhängig
- Die Zeilenvektoren A sind linear unabhängig
- Der Rang von A ist gleich n : $\text{rang}(A) = n$
- Matrix A ist invertierbar
- Das System hat eine eindeutige Lösung
- $Ax = b \rightarrow x = A^{-1} \cdot b$

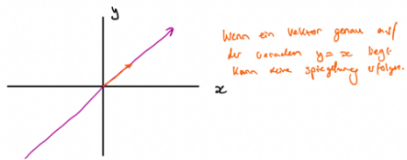
$\det(A) = 0$

- Die Spaltenvektoren A sind linear abhängig
- Die Zeilenvektoren A sind linear abhängig
- Der Rang ist kleiner als n : $\text{rang}(A) < n$
- Matrix A ist singular (nicht invertierbar)
- Das System $Ax = b$ hat keine eindeutige Lösung
- $\rightarrow$ kein x existiert
- $\rightarrow$ kein x existiert

Eigenwerte für Dreiecksmatrizen & Diagonalmatrizen:

- Alle Werte der Hauptdiagonalen
- Alle Eigenwerte sind reell
- Für jeden Eigenwert λ gilt $\mu_{\lambda} = 1$
- Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- Skalarprodukt $= 0$

A2) $R^2 - R^3 \rightarrow f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$



Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ Eigenwert von f sind.

Allgemeine Gleichung:

$\det(A - \lambda I) = 0$

① Elemente

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\therefore \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Ähnlichkeit:

Determinante einer 2x2 Matrix:
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det(A) = ad - bc$

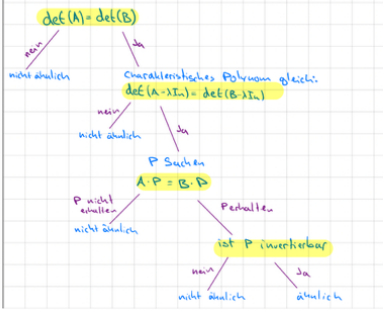
① Determinantenvergleich

② Vergleich der charakteristischen Polynomgleichung

③ P suchen

④ Ist P invertierbar?

Ähnlichkeit zwischen zwei Matrizen finden:



P finden: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

① Determinante

$\det(A) = 4$

$\det(B) = 4$

Somit $4 = 4$

② Charakteristisches Polynom:

$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} \lambda - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda \end{pmatrix}$

$= (\lambda - \lambda) \cdot (\lambda - \lambda)$

$= 4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2$

$\therefore \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\therefore \det \begin{pmatrix} \lambda - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda \end{pmatrix}$

$= ((\lambda - \lambda) \cdot (\lambda - \lambda) - 0 \cdot 1)$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\therefore \text{Somit } \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

③ P suchen:

$A \cdot P = P \cdot B$

$\therefore A \cdot P = P \cdot B$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

① Eigenwerte und Matrix D bestimmen:

Bestimmung des charakteristischen Polynoms:

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$

$= ((-1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - (4 \cdot 2))$

$= -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 - 8$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

$= \lambda^2 - 9 = 0$

Bedingungen dass A diagonalisierbar ist:

- A hat linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\dim E_\lambda = 1$
- A ist reell und symmetrisch

5.19. Subst. Kap 4 Teil 2

1. Die formale Hauptbedingung (immer gültig):

Eine Matrix ist exakt dann diagonalisierbar, wenn sie genau n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Der rechnerische Beweis (folgt dem Eigenwert) muss zwingend gelten:

Algebraische Vielfachheit = Geometrische Vielfachheit ($a_1 = 1$)

Das bedeutet die Matrix hat oft ein Eigenwert λ mit Vielfachheit a_1

Polynom zerlegt, entspricht (je nach Anzahl der Eigenwerte), die die Gleichung erfüllt für diesen Eigenwert erfüllt

2. Die schenken Abzählungen (Stoff diagonalisierbar)

Wenn in der Klausur eine dieser beiden Bedingungen zutrifft, kannst du dir den langen Beweis über die Vielfachheiten komplett sparen:

Abzählung 1 (Verschiedene Eigenwerte): Die Matrix hat exakt n verschiedene Eigenwerte (Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Matrix liefert 2 verschiedene Eigenwerte)

Abzählung 2 (Symmetrie): Die Matrix ist reell und symmetrisch (d.h. $A^T = A$)

Geben Sie einen Eigenwert λ an.

A =

Allgemeine Gleichung:

$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$

① Elemente:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$