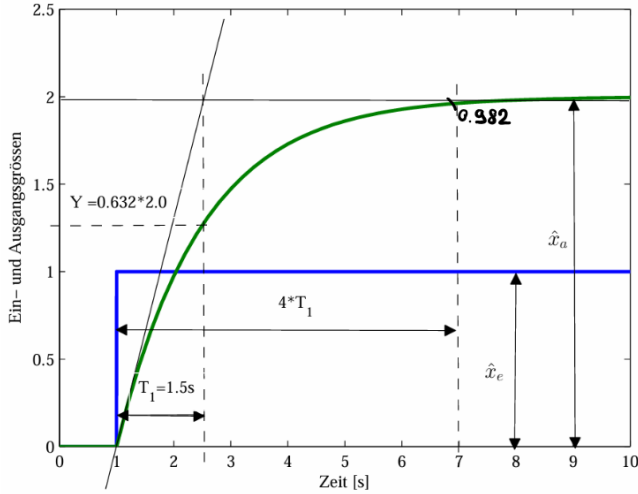
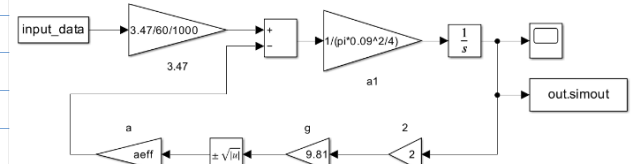


MRT1 Zusammenfassung



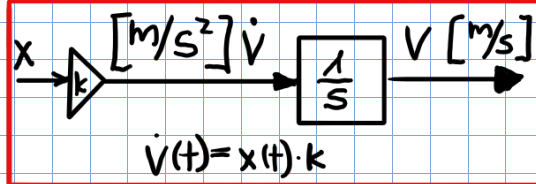
$$K_S = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{\text{Unit 2}}{\text{Unit 1}} = G(0) \text{ Stationär}$$



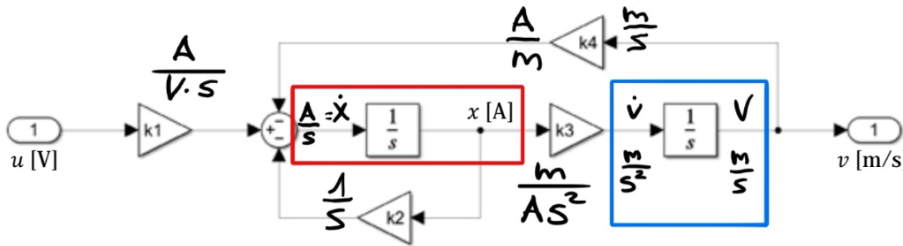
PT1 Glied:

$$T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_S \cdot x_e(t)$$

T_1 : Zeit
 K_S : Statische Veränderung



Links vom Integrator steht die abgeleitete rechte Seite!
Diese Ableitung wird gleich gesetzt mit den Summenknoten links.



$$\dot{x}(t) = u(t) \cdot k_1 - x(t) \cdot k_2 - v(t) \cdot k_4$$

$$\dot{v}(t) = x(t) \cdot k_3$$

Dominantes Verhalten

Proportionales Verhalten (P-Glied):

$$a_0 \neq 0 \text{ und } b_0 \neq 0: K_S = \frac{b_0}{a_0}$$

Integrales Verhalten (I-Glied):

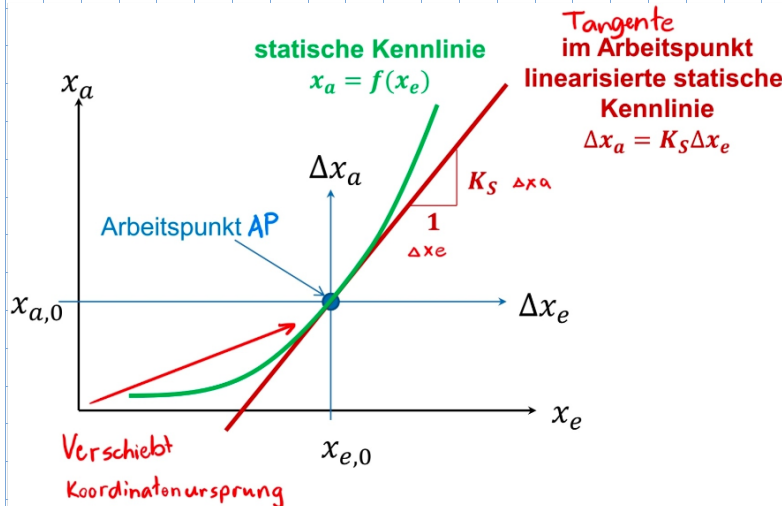
$$a_0 = 0 \text{ und } b_0 \neq 0: K_S = \infty$$

Differentiales Verhalten (D-Glied):

$$a_0 \neq 0 \text{ und } b_0 = 0: K_S = 0$$

$$K_S = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

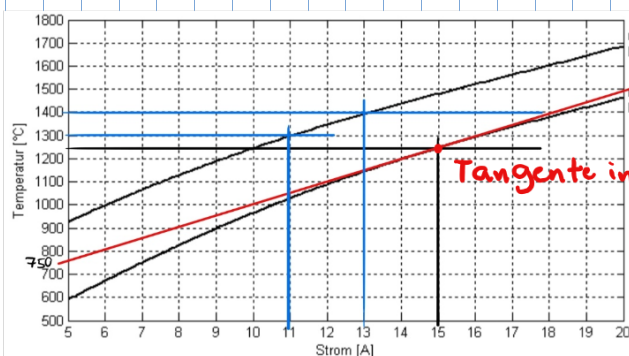
Statische Kennlinie Linearisierung



$$K_S = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e}$$

Reglergesetz

$$y = K_S (x_{\text{ Soll }} - x_{\text{ Ist }}) + y_0$$



Bsp

$$K_S = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{1500 - 750^\circ\text{C}}{20 - 5\text{ A}} = 50 \frac{^\circ\text{C}}{\text{A}}$$

Stationär: Alle Ableitungen = 0 = x-dot

$$200 \dot{x} + \frac{x^2}{350^2} + 1 = y \rightarrow \frac{x^2}{350^2} + 1 = y$$

Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\text{Laplace-transformierten Ausgangsgrösse } X_a(s)}{\text{Laplace-transformierten Eingangsgrösse } X_e(s)}$

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}} \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &\rightarrow s Y(s) \\ \ddot{y}(t) &\rightarrow s^2 Y(s) \end{aligned}$$

PT1

$$T \dot{y} + y = K u$$

$$T s Y(s) + Y(s) = K U(s)$$

$$(T s + 1) Y(s) = K U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T s + 1}$$

PT2 Glied Zerlegen

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)} \quad \begin{aligned} \text{Pole } s &= -a \\ s &= -b \end{aligned}$$

$$\text{Zeitkonstanten: } T_1 = \frac{1}{a}, T_2 = \frac{1}{b}$$

$$\text{PT1-Glied } \frac{1}{T \cdot s + 1}$$

$$G(s) = \frac{8}{8s^2 + 6s + 1} \rightarrow p_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} \quad \begin{aligned} p_1 &= -0.25 \\ p_2 &= -0.5 \end{aligned}$$

$$T_1 = \frac{1}{0.25} = 4, T_2 = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$G = \frac{8 = K s}{(4s+1)(2s+1)} = \frac{8}{4(s+0.25)2(s+0.5)} = \frac{1}{(s+0.25)(s+0.5)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{s+0.5} \rightarrow \frac{1}{s+0.25} \rightarrow K s = G(0) = \frac{8}{0+0+1} = 8 \quad \text{Zeitkonstantenform}$$

$$G_{\text{ges}}(s) = G_1(s) G_2(s)$$

$$2b) \quad \dot{y} = 2u + 4z$$

$$Y(s) \cdot s = 2U(s) + 4Z(s)$$

$$\frac{Y(s) \cdot s - 2U(s)}{4} = Z(s) \quad \begin{aligned} &\text{Einsetzen} \\ &2 \text{ eliminieren} \end{aligned}$$

$$5 \cdot \left(\frac{Y(s) \cdot s - 2U(s)}{4} \right) \cdot s^2 - 3Y(s) = U(s) \cdot s$$

$$\frac{5 \cdot s^3 \cdot Y(s)}{4} - 3Y(s) = U(s) \cdot s + \frac{10U(s) \cdot s^2}{4} \quad G(s) = \frac{s + \frac{5}{2} s^2}{\frac{5}{4} s^3 - 3} = \frac{10s^2 + 4s}{5s^3 - 12}$$

$$Y(s) \left(\frac{5s^3}{4} - 3 \right) = U(s) \left(s + \frac{5s^2}{2} \right)$$

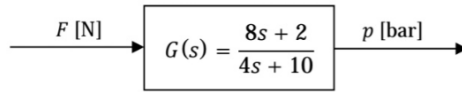
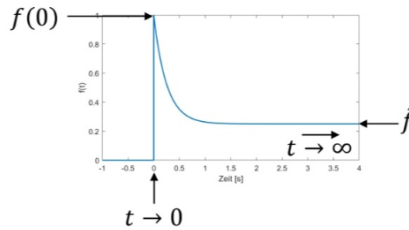
Vereinfachen

Anfangswertsatz:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s \cdot F(s)\}$$

Endwertsatz:

$$\hat{f} = f_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot F(s)\}$$



- a) Berechnen Sie den Druck $p(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und den stationären Endwert $p(\infty)$, wenn die Kraft $F(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Sprung von 0 auf 4 N macht.

$$F(s) = \frac{x_e}{s} = \frac{4}{s} \quad \text{Xa} \quad P(s) = G(s) \cdot F(s) = \frac{8s+2}{4s+10} \left(\frac{4}{s} \right) \quad \text{Xe}$$

$$P(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \left(\frac{8s+2}{4s+10} \right) \left(\frac{4}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{32s+8}{4s+10} = \frac{32}{4} = 8 \text{ bar}$$

s unendlich gross, 8/10 vernachlässigbar

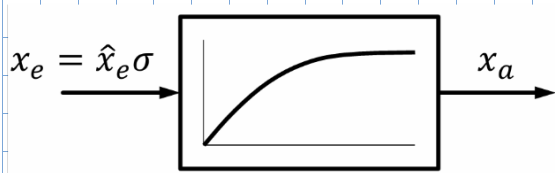
$$P(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{8s+2}{4s+10} \right) \left(\frac{4}{s} \right) = \frac{32s+8}{4s+10} = \frac{8}{10} = 0.8 \text{ bar}$$

Ordnung: Höchste Ableitung der Ausgangsvariable $\xrightarrow{u(t)} G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{\frac{s^2}{k_3} + \frac{s \cdot k_2}{k_3} + k_4}$

Eingang

$$U(s) = \frac{s^2}{k_3} + \frac{s \cdot k_2}{k_3} + k_4 \rightarrow s^2 = 2. \text{ Ordnung}$$

Sprungfunktion $\sigma(t)$



$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}}$$

$$X(t) = \hat{x} \cdot \sigma(t) \quad \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \hat{x} \cdot \frac{1}{s}$$

$\hat{x}$: Sprung (Zahl)

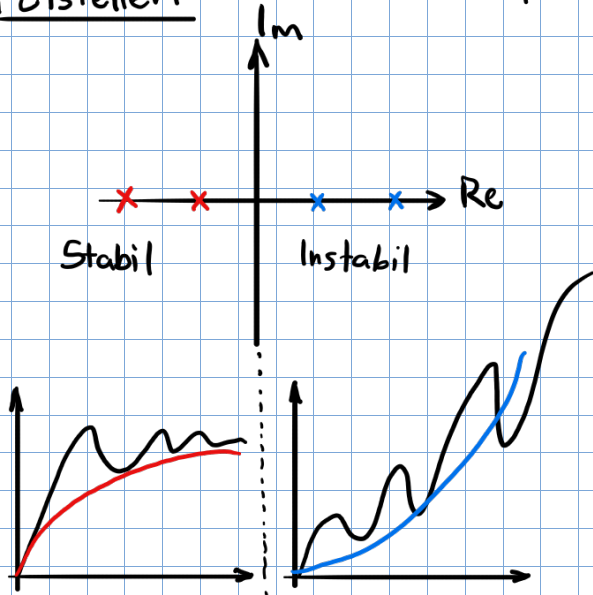
$$K_s = G(0)$$

$$y(\infty) = K_s \cdot \hat{x}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot \frac{\hat{x}}{s} \\ \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t)$$

Polstellen

S.80 Skript



Stationärer Endwert; Unendliche Amplitude

Δ_1 = Erster Überschuss der Sprungweite über den Endwert.

$$\Delta_1 = \frac{y_{\max} - y_{\text{endwert}}}{A}$$

Pol Nullstellen

Polstellen: $-1, -100$

Polstelle: $-10 \pm 10j$

$-10 + 10j$

$-10 - 10j$



$$s = -\sigma + j \cdot \omega_d$$

Bsp. $s = -2 \pm j1 \rightarrow \sigma = 2, \omega_d = 1$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

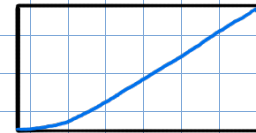
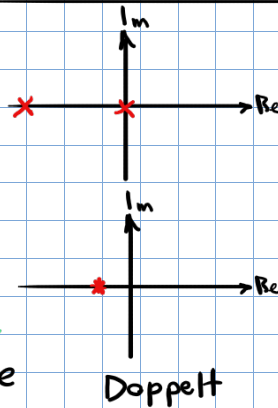
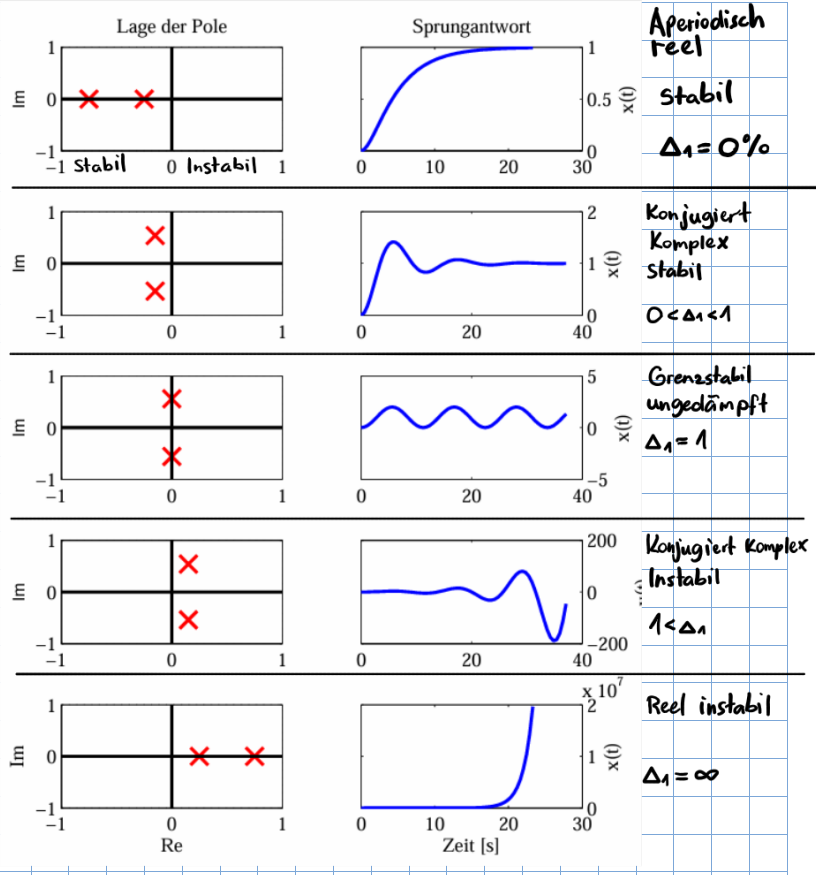
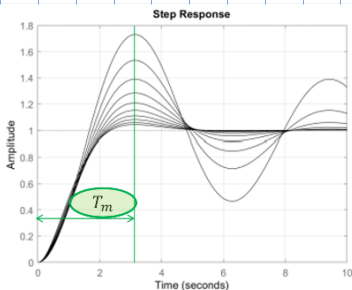
$$\xi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta_1 = 100 \cdot e^{\left(-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} [\%]$$

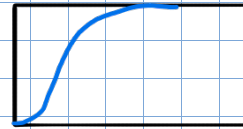
$$\Delta_1 = 100 \cdot e^{\left(-\frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \pi}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}}\right)} = 100 \cdot e^{-2\pi} = 0.186\%$$

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$T_m = \frac{\pi}{1} = 3.14s$$



IT1
Reel/Grenzstabil
 Δ_1 = nicht definiert



PT2
Reel/Grenzstabil

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

z = Nullstellen

p = Polstellen

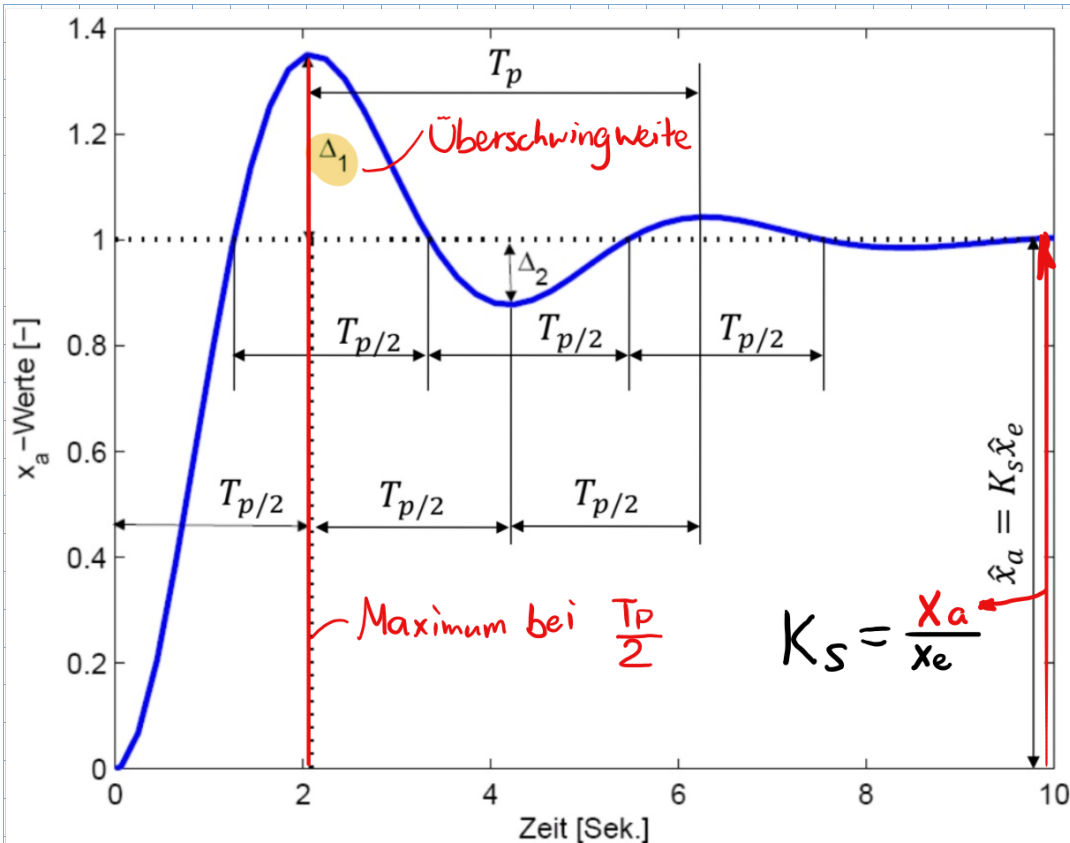
$$k = \frac{b_m}{a_n}$$

Nullstelle bei $s=0$, $K_s=0$ (D-Verhalten)

$$G(s) = \frac{K_s \cdot s}{s + 5}, G(0) = K_s = 0$$

Nullstelle -1

$$G(s) = \frac{K_s(s+1)}{s+5}, G(0) = K_s$$



Gedämpfte Eigenkreisfreq.

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_p}$$

Logarithmisches Dekrement

$$\vartheta = \ln \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+n}}$$

Dämpfungsmaß

$$\xi = \frac{\vartheta}{\sqrt{\pi^2 + \vartheta^2}} = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Ungedämpfte Eigenkreisfreq.

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$$

$$DGL: m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F$$

$$mX(s) \cdot s^2 + bX(s) \cdot s + c \cdot X(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}, \quad K_s = \frac{1}{k}$$

$$J = \frac{1}{K_s \omega_n^2}$$

$$\text{kg} / \text{kgm}^2$$

$$b = 2\zeta\omega_n m$$

$$\frac{\text{N}}{\text{m/s}} / \frac{\text{Nm}}{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$k = \omega_n^2 m$$

$$\text{N/m} / \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

$$G(s) = \frac{K_s \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

1. T_p = Periodendauer

2. $\omega_d, \vartheta, \zeta, \omega_n, m, b, k$

Verdrehwinkel

$$\varphi_\infty = \frac{1}{k} = \frac{2}{0.2} \text{ rad}$$

Maximaler Verdrehwinkel bei $\frac{T_p}{2}$

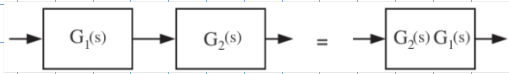
$$\varphi\left(\frac{T_p}{2}\right)$$

Übertragungsfunktionen $G(s)$ S. 66

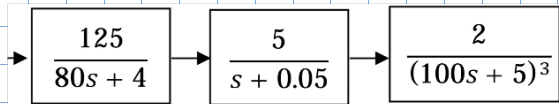
Serie

MRT - G. m

$$G(s) = G_{s1} \cdot G_{s2}$$



Gesamtübertragungsfunktion



$$G_1 = \frac{125}{80s + 4} \xrightarrow{:4} \frac{31.25}{20s + 1} \rightarrow T_1 = 20s$$
$$\rightarrow K_1 = \frac{31.25}{0.5 + 1} = 31.25$$

$$G_2 = \frac{5}{s + 0.05} \xrightarrow{\cdot 20} \frac{100}{20s + 1} \rightarrow T_2 = 20s$$
$$\rightarrow K_2 = 100$$

$$G_3 = \frac{2}{(100s + 5)^3} \rightarrow \frac{2}{5^3(20s + 1)^3} \approx \frac{2}{125(20s + 1)^3} \rightarrow T_3 = 20s$$
$$\rightarrow K_3 = \frac{2}{5^3 \cdot 1^3} = \frac{2}{125} = 0.016$$

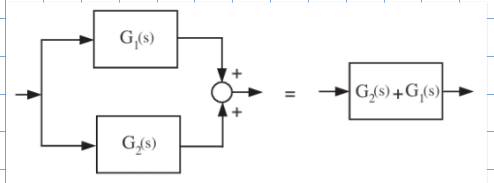
$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = \frac{31.25 \cdot 100 \cdot 0.016}{(20s + 1)^{3+1+1}} = \frac{50}{(20s + 1)^5}$$

Mittlere Zeitkonstante

$$\frac{80s}{4} = \frac{1s}{0.05} = \frac{100s}{5} = 20s$$

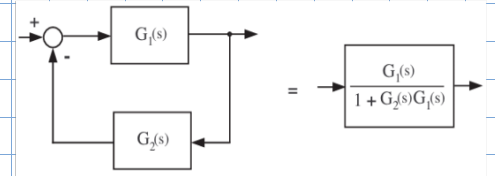
Parallel

$$G(s) = G_{s1} + G_{s2}$$



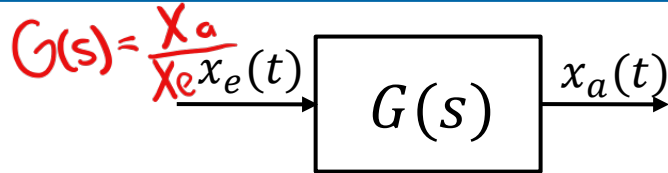
Kreisschaltung

$$G(s) = \frac{G_{s1}}{1 + (G_{s1} \cdot G_{s2})}$$



Übertragungsfunktionen

Beispiel – Darstellungsformen



DGL: $50\ddot{x}_a + 35\dot{x}_a + 5x_a = 10x_e$
 $(50s^2 + 35s + 5)X_a(s) = 10X_e(s)$

Polynom-Darstellung

$$G(s) = \frac{10}{50s^2 + 35s + 5} = \frac{2}{10s^2 + 7s + 1} = \frac{0.2}{s^2 + 0.7s + 0.1}$$

$$G(0) = \frac{10}{5} = 2$$

Pol-Nullstellen-Darstellung

$$G(s) = \frac{0.2}{(s + 0.2)(s + 0.5)}$$

$$s^2 + 0.7s + 0.1 = 0$$

$$p_1 = -0.2$$

$$p_2 = -0.5$$

$$G(0) = \frac{0.2}{0.2 \cdot 0.5} = 2$$

Zeitkonstanten-Darstellung

$$G(s) = \frac{2}{(5s + 1)(2s + 1)}$$

$$T_1 = -1/p_1 = 5$$

$$T_2 = -1/p_2 = 2$$

$$G(0) = 2$$

Summen-Darstellung (Partialbruchzerlegung) (Nicht SEP)

$$G(s) = \frac{r_1}{(5s + 1)} + \frac{r_2}{(2s + 1)} = \frac{10/3}{(5s + 1)} + \frac{-4/3}{(2s + 1)}$$

$$G(0) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = 2$$

Statische Verstärkung einer Übertragungsfunktion

Stationärer Endwert
 $t=0$: Sprung von 0 nach 4

- Beharrungszustand für eine Sprungantwort: $x_e(t) = \hat{x}_e \sigma(t)$

- Eingangssignal: $X_e(s) = \frac{\hat{x}_e}{s}$

- Ausgangssignal: $X_a(s) = G(s)X_e(s) = G(s) \frac{\hat{x}_e}{s}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{\hat{x}_e}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \hat{x}_e = G(0) \hat{x}_e = K_s \hat{x}_e$$

- für eine Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$

- Statische Verstärkung:

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

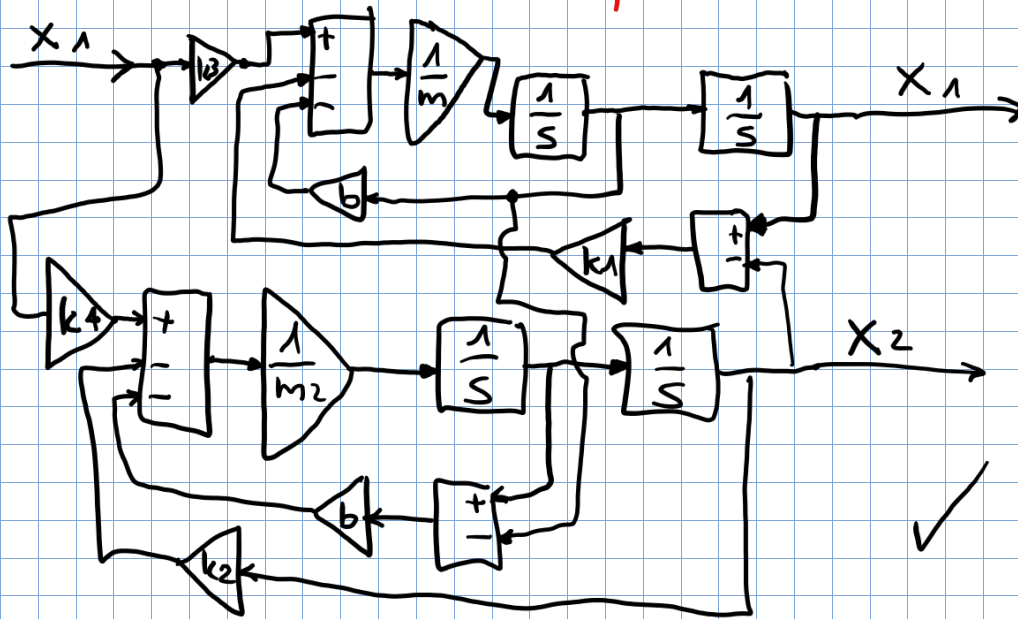
Aufgabe 2 $\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-k_1(x_1-x_2) - b\dot{x}_1 + k_3 x_e)$

$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(-k_2 x_2 - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_4 x_e)$

Eingang: x_e

Ausgang: $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1$
 $x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$

Pfeile!



	$f(t)$, für $t > 0$	$F(s)$
1	Impulsfunktion $\delta(t)$	1
2	Sprungfunktion $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$ →
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
7	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
8	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$ $\pi 1$
9	$\frac{1}{a^2}(-1 + at + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
10	$\frac{1}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{T_1 s + 1}$
11	$\frac{t}{T_1^2}e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{(T_1 s + 1)^2}$
12	$\frac{t^{n-1}}{T_1^n (n-1)!}e^{-\frac{t}{T_1}}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(T_1 s + 1)^n}$
13	$1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)}$
14	$1 - \left(1 + \frac{t}{T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}$	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)^2}$
15	$1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\frac{t}{T_1})^i}{i!}$	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)^n}, n = 1, 2, \dots$
16	$\frac{1}{T_1 - T_2} \left[e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$	$\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_1 \neq T_2$
17	$\left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right]$	$\frac{1 \cdot \kappa}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_1 \neq T_2$
18	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
19	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Sprungfunktion

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{u} = 5 &\rightarrow u(t) = 5 \cdot 1(t) \\ U(s) &= \frac{5}{s} \end{aligned} \right\}$$

AO O Stellsignal (Sollwert)

→ Stellsignal

AIO → Analog Input (Istwert)

	$f(t)$, für $t > 0$	$F(s)$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
23	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
24	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
25	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
26	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}, 0 < \xi < 1$
27	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}, 0 < \xi < 1$

In Sprungfunktion Tabelle

$$y(t) = K_s \hat{x} \left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \right] \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \arccos(\zeta)$$

$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $+^n$ 6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1)	1	$\delta(t)$ (Diracsche Deltafunktion)
(2)	$\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion $\sigma(t)$)
(3)	$\frac{1}{s-a}$	e^{at} für $a=0$
(4)	$\frac{1}{s^2}$	t $n=2$
(5)	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(6)	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(7)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(8)	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(9)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at}-b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(10)	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
(11)	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
(12)	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at}+1}{a^2}$
(13)	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$
(14)	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$\frac{b \cdot e^{at}-a \cdot e^{bt}+a-b}{ab(a-b)}$
(15)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(b-c) \cdot e^{at}+(c-a) \cdot e^{bt}+(a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(16)	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} at^2+t\right) \cdot e^{at}$
(17)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a \cdot e^{at}-[a+b(a-b)t] \cdot e^{bt}}{(a-b)^2}$
(18)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c) \cdot e^{at}+b(c-a) \cdot e^{bt}+c(a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(19)	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} a^2 t^2+2 a t+1\right) \cdot e^{a t}$
(20)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2 \cdot e^{a t}-\left[b^2(a-b) t+2 a b-b^2\right] \cdot e^{b t}}{(a-b)^2}$
(21)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c) \cdot e^{a t}+b^2(c-a) \cdot e^{b t}+c^2(a-b) \cdot e^{c t}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(22)	$\frac{1}{s^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \frac{1}{s^n}=\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}=\frac{(n-1)!}{s^n}$
(23)	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{a t}}{(n-1)!}$
(24)	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin (a t)}{a} \quad \sin (t) \rightarrow a=1$
(25)	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos (a t)$
(26)	$\frac{(\sin b) \cdot s+a \cdot \cos b}{s^2+a^2}$	$\sin (a t+b)$
(27)	$\frac{(\cos b) \cdot s-a \cdot \sin b}{s^2+a^2}$	$\cos (a t+b)$
(28)	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sin (a t)}{a}$
(29)	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{b t} \cdot \cos (a t)$
(30)	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh (a t)}{a}$
(31)	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh (a t)$
(32)	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sinh (a t)}{a}$
(33)	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{b t} \cdot \cosh (a t)$
(34)	$\frac{1}{s\left(s^2+4 a^2\right)}$	$\frac{\sin ^2(a t)}{2 a^2}$
(35)	$\frac{s^2+2 a^2}{s\left(s^2+4 a^2\right)}$	$\cos ^2(a t)$
(36)	$\frac{1}{s\left(s^2+a^2\right)}$	$\frac{1-\cos (a t)}{a^2}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(37)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) - at \cdot \cos(at)}{2a^3}$
(38)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$
(39)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) + at \cdot \cos(at)}{2a}$
(40)	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at)$
(41)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos(at) - \frac{1}{2} at \cdot \sin(at)$
(42)	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{at - \sin(at)}{a^3}$
(43)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(bt) - b \cdot \sin(at)}{ab(a^2 - b^2)}$
(44)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{\cos(bt) - \cos(at)}{a^2 - b^2}$
(45)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(at) - b \cdot \sin(bt)}{a^2 - b^2}$
(46)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cdot \cos(at) - b^2 \cdot \cos(bt)}{a^2 - b^2}$
(47)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{-at \cdot \sin(at) - \cos(at) + 1}{2a^4}$
(48)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{b^2 \cdot \cos(at) - a^2 \cdot \cos(bt) + a^2 - b^2}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}$
(49)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	$\frac{\cosh(at) - 1}{a^2}$
(50)	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \cosh(at) - \sinh(at)}{2a^3}$
(51)	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sinh(at)}{2a}$
(52)	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh(at) + at \cdot \cosh(at)}{2a}$
(53)	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cdot \cosh(at)$
(54)	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} at \cdot \sinh(at) + \cosh(at)$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(55)	$\frac{1}{s^2(s^2 - a^2)}$	$\frac{\sinh(at) - at}{a^3}$
(56)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \sinh(at) - 2 \cdot \cosh(at) + 2}{a^4}$
(57)	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(58)	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(59)	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left[e^{-at} + 2 \cdot e^{at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(60)	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[e^{3at/2} - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(61)	$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[e^{3at/2} + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(62)	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left[e^{at} - 2 \cdot e^{-at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(63)	$\frac{1}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left[\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(64)	$\frac{s}{s^4 + a^4}$	$\frac{\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)}{a^2}$
(65)	$\frac{s^2}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a \sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(66)	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	$\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
(67)	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) - \sin(at)}{2a^3}$
(68)	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) - \cos(at)}{2a^2}$
(69)	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) + \sin(at)}{2a}$
(70)	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) + \cos(at)}{2}$
(71)	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin(at) \cdot \sinh(at)}{2a^2}$

Extremwerte

lokale Maxima und Minima

- erster Extremwert Δ_1
(erster Überschwinger)
bei $t_1 = T_p/2$
- zweiter Extremwert Δ_2
(erster Unterschwinger)
bei $t_2 = 2T_p/2$
- k -ter Extremwert Δ_k
(Über- oder Unterschwinger)
bei $t_k = kT_p/2$
- Logarithmisches Dekrement

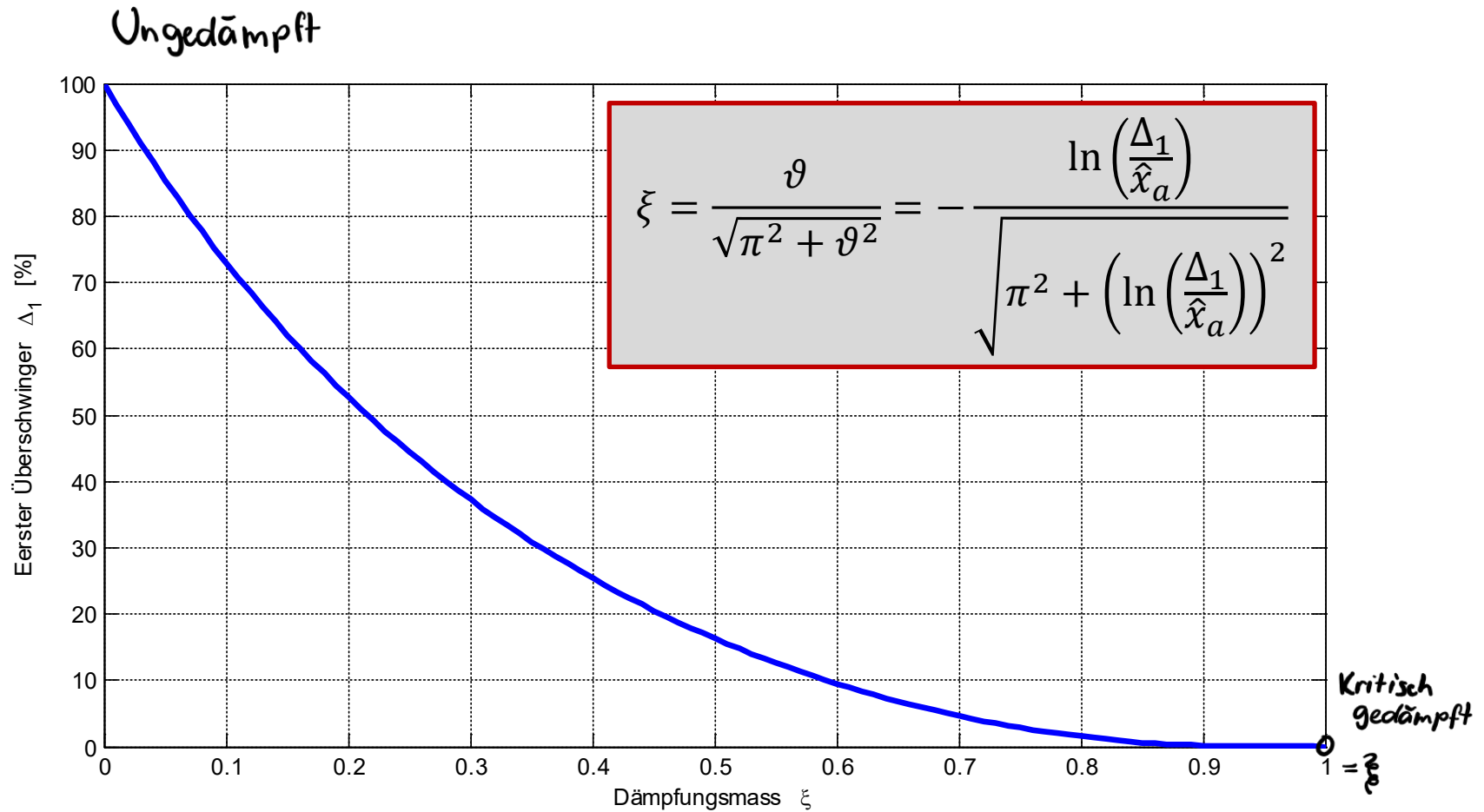
$$\Delta_1 = \hat{x}_a e^{-\vartheta} \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\Delta_2 = \hat{x}_a e^{-2\vartheta} \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\Delta_k = \hat{x}_a e^{-k\vartheta} \quad t_k = \frac{k\pi}{\omega_d}$$

$$\vartheta = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{\Delta_k}{\hat{x}_a} \right) \quad \vartheta = \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+n}}$$

Überschwinger vs. Dämpfungsgrad bei einem PT2



Zeitkonstanten der DGL zweiter Ordnung

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{x}_a + \frac{2\xi}{\omega_n} \dot{x}_a + x_a = K_S x_e$$

für $0 \leq \xi < 1$:

$$T_2^2 \ddot{x}_a + T_1 \dot{x}_a + x_a = K_S x_e$$

$$G_S = \frac{K_S}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

$$G_S = \frac{K_S}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$$

- Zeitkonstante T_1

$$T_1 = \frac{2\xi}{\omega_n}$$

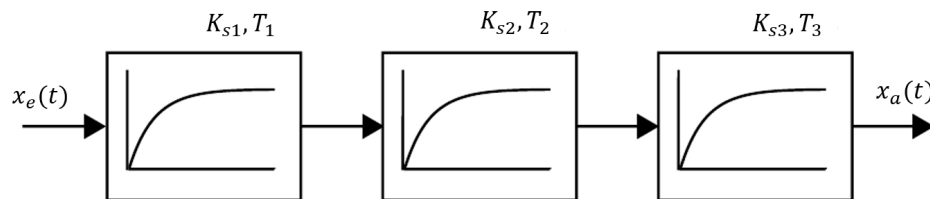
- Zeitkonstante T_2

$$T_2 = \frac{1}{\omega_n}$$

Wendetangentenverfahren

PTn-Glied mit gleichen Zeitkonstanten

PTn bedeutet: n PT1-Glieder in Serie:



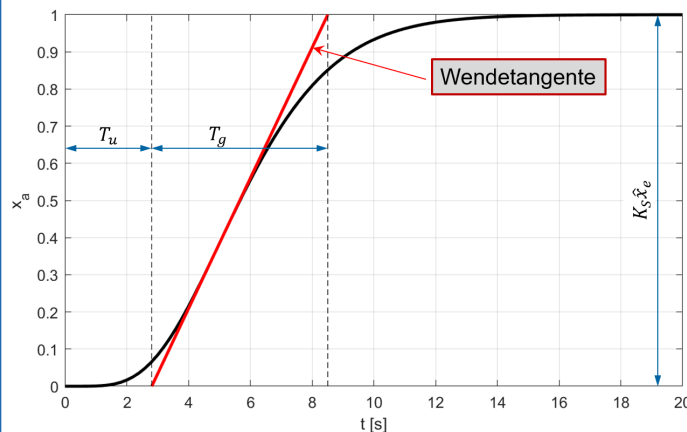
Jedes einzelne PT1-Glied hat gleichgrosse oder zumindest ähnliche Zeitkonstanten T_m

$$G(s) = \frac{K_S}{(T_m s + 1)^n}$$

Mittelwert nehmen

$$K_S = \prod_{i=1}^n K_{Si} \quad T_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$$

Wenn Unterschied T_m



Ordnung	n
statische Verstärkung	K_S
mittlere Zeitkonstante	T_m
Verzugszeit	T_u
Ausgleichszeit	T_g

n	$\frac{T_g}{T_u}$	$\frac{T_g}{T_m}$	$\frac{T_u}{T_m}$
2	9.65	2.72	0.28
3	4.59	3.69	0.80
4	3.13	4.46	1.42
5	2.44	5.12	2.10
6	2.03	5.70	2.81
7	1.75	6.23	3.55
8	1.56	6.71	4.30
9	1.41	7.16	5.08
10	1.29	7.59	5.87

Zeit – Prozent – Kennwert nach Schwarze

PTn–Glied mit gleichen Zeitkonstanten

- 1) Die drei Zeiten t_{10} , t_{50} und t_{90} ab dem Sprungzeitpunkt bestimmen
- 2) Ordnung n aus dem Verhältnis $\mu = \frac{t_{10}}{t_{90}}$ bestimmen (runden) **PT2 $\rightarrow n=2$**

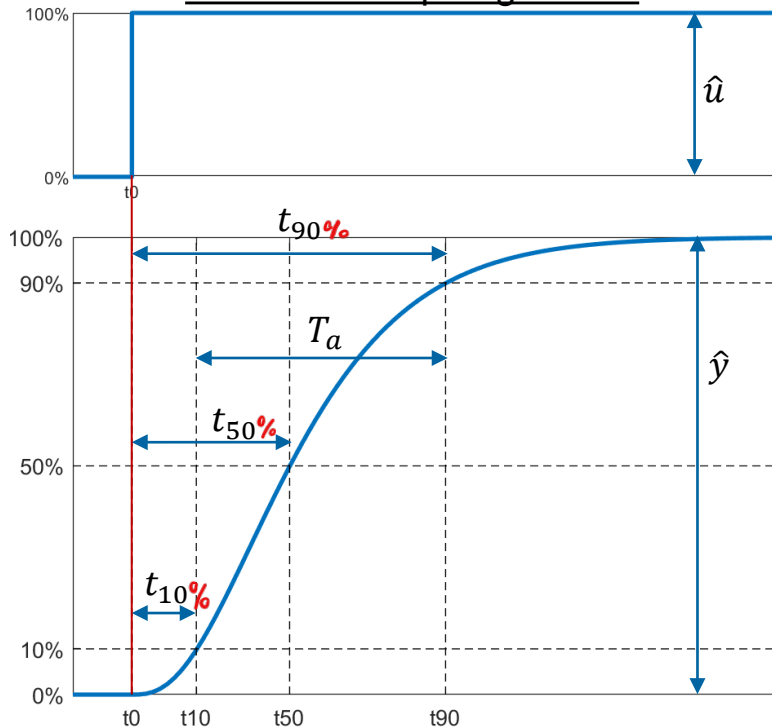
- 3) Mittlere Zeitkonstante $T_m = \frac{1}{3} \left(\frac{t_{10}}{\alpha_{10}} + \frac{t_{50}}{\alpha_{50}} + \frac{t_{90}}{\alpha_{90}} \right)$

Wenn zwei gleiche PT1 Glieder $T_1 = T_m$

- 4) Statische Verstärkung $K_s = \frac{\hat{y}}{\hat{u}}$

$$G(s) = \frac{K_s}{(T_m s + 1)^n}$$

Gemessene Sprungantwort:



n	μ	$\alpha_{10} = \frac{t_{10}}{T_m}$	$\alpha_{50} = \frac{t_{50}}{T_m}$	$\alpha_{90} = \frac{t_{90}}{T_m}$	$\alpha = \frac{T_a}{T_m}$
1	0.046	0.11	0.7	2.3	2.2
2	0.14	0.53	1.7	3.9	3.4
3	0.21	1.1	2.7	5.3	4.2
4	0.26	1.7	3.7	6.7	4.9
5	0.30	2.4	4.7	8.0	5.6
6	0.34	3.2	5.7	9.3	6.1
7	0.37	3.9	6.7	10.5	6.6
8	0.40	4.7	7.7	11.8	7.1
9	0.42	5.4	8.7	13.0	7.6
10	0.44	6.2	9.7	14.2	8.0

Anstiegszeit: $T_a = t_{90} - t_{10}$

Rise-Time

3. Laplace

15 Punkte

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$2y(t) + 14\dot{y}(t) + 20\ddot{y}(t) = 16u(t) \text{ mit } \dot{y} = 0 \text{ und } y = 0$$

a) Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in Zeitkonstantenform

$$2Y(s) + 14Y(s) \cdot s + 20Y(s) \cdot s^2 = 16U(s)$$

$$Y(s)(2 + 14s + 20s^2) = 16U(s)$$

$$P_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1}}{2 \cdot 10} \begin{cases} -0.2 \rightarrow T_1 = \frac{1}{0.2} = 5 \\ -0.5 \rightarrow T_2 = \frac{1}{0.5} = 2 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{16}{2 + 14s + 20s^2} = \frac{8}{10s^2 + 7s + 1} \quad a=10, b=7, c=1 \quad G(s) = \frac{8}{(5s+1)(2s+1)}$$

b) Berechnen Sie den Zeitverlauf von $y(t)$ für ein sprungartiges Eingangssignal $u(t)$ mit einer Amplitude von $\hat{u} = 5$.

$$\hat{u} = u(t) = 5 \cdot 1(t) \rightarrow U(s) = \frac{5}{s} \quad (\text{Sprungfunktion})$$

$$\text{Gesucht } y(t) \rightarrow Y(s) = U(s) \cdot G(s) = \frac{5 \cdot 8}{s(5s+1)(2s+1)} = \frac{40}{s(5s+1)(2s+1)}$$

$$\text{Rücktransformation } \mathcal{L}^{-1} \quad y(t) = 40 \left[1 - \frac{1}{3} \left[5e^{-\frac{t}{5}} - 2e^{-\frac{t}{2}} \right] \right]$$

$$17K: \left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right] \quad \frac{1 \cdot K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \neq T_2$$

c) Wie gross ist die bleibende Abweichung $e = u - y$ für $t \rightarrow \infty$ wenn am Eingang u eine Sprungfunktion $u(t) = 8\sigma(t)$ anliegt?Gesuchter fehler $e = u - y$ $t \rightarrow \infty$

$$\text{Endwertsatz} \quad y(t)_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

$$\text{Eingangssignal } u(t)_{\infty} = 8\sigma(t) \leftarrow \text{Sprungfunktion}$$

$$u(t)_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U(s) = 8 \cdot \frac{8}{s} = 8$$

$$y(t)_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U(s) \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{8 \cdot 8}{s(10s^2 + 7s + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{64}{10s^2 + 7s + 1} = 64$$

$$e = u_{\infty} - y_{\infty} = 8 - 64 = -56$$

Endwertsatz

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s), \quad y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

Anfangswert

Endwert

- d) Geben Sie die analytische Funktion $p(t)$ für ein sprungartiges Öffnen des Einlassventils von 0 auf $\hat{h} = 10 \text{ mm}$ an.

$$\hat{h} = h(t) = 10 \cdot 1(t) = H(s) = \frac{10}{s}$$

$$\text{Gesucht } p(t) \rightarrow P(s) = \frac{40}{(s+10)} \cdot \frac{10}{s} = \frac{400}{s(s+10)}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} p(t) = 400 \left[\frac{1}{10} (1 - e^{-10t}) \right] = \underline{\underline{40(1 - e^{-10t})}}$$

- e) Wie lange dauert es bis der Druckbehälter 80% befüllt ist, wenn das Einlassventil wie in Aufgabe d) beschrieben geöffnet wird? Ist diese Zeit abhängig von der Grösse der Ventilöffnung (Begründung)?

$$\hat{h} = 10 \text{ mm} \quad \hat{p} = G(0) \cdot \hat{h} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{h} = \frac{40}{10} \cdot 10 = 40 \text{ bar}$$

$$80\% \rightarrow 0.8 \cdot 40 \text{ bar} = 32 \text{ bar}$$

$$32 = 40(1 - e^{-10t})$$

$$0.8 = 1 - e^{-10t}$$

$$e^{-10t} = 1 - 0.8$$

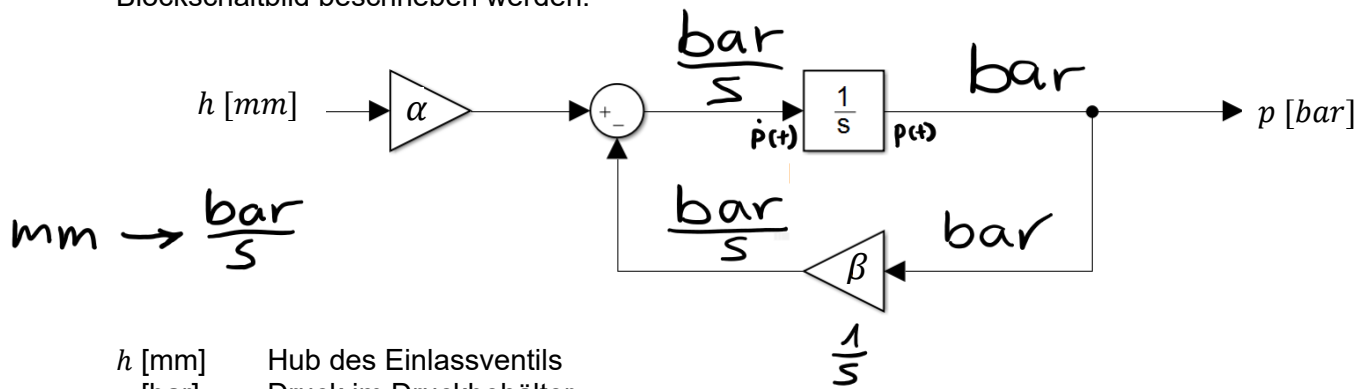
$$-10t = \ln(0.2)$$

$$t = \frac{\ln(0.2)}{-10} = \underline{\underline{0.161 \text{ s}}}$$

4. Pneumatischer Druckbehälter

20 Punkte

Das Befüllen eines pneumatischen Druckbehälters mit einem Verbraucher kann mit folgendem Blockschaltbild beschrieben werden:



h [mm] Hub des Einlassventils
 p [bar] Druck im Druckbehälter
 $\alpha = 40$ erster Parameter die den Prozess beschreibt
 $\beta = 10$ zweiter Parameter die den Prozess beschreibt

- a) Welche Einheiten müssen die Parameter α und β jeweils haben, damit das obige Blockschaltbild korrekt ist?

$$\alpha = \frac{\text{bar}}{\text{s} \cdot \text{mm}}$$

$$\beta = \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{\text{Ausgangseinheit}}{\text{Eingangseinheit}}$$

- b) Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{p(s)}{h(s)}$?

Vor dem Integrator $\alpha \cdot h - \beta \cdot p$

Nach dem Integrator $p(s) = \frac{1}{s} (\alpha \cdot h(s) - \beta p(s))$

$$s \cdot p(s) = \alpha \cdot h(s) - \beta p(s)$$

$$p(s)(s + \beta) = \alpha \cdot h(s)$$

$$G(s) = \frac{p(s)}{h(s)} = \frac{\alpha}{s + \beta} = \frac{40}{s + 10} \rightarrow \boxed{\frac{4}{0.1s + 1}} \quad \text{PT1 Form}$$

- c) Wie weit muss das Einlassventil geöffnet werden, damit ein konstanter statischer Druck von $\hat{p} = 8 \text{ bar}$ erreicht werden kann?

Konstant statisch = Stationärer Zustand $\rightarrow$ Keine Änderung des Druckes $\dot{p}(t) = 0$

Vor dem Integrator $\alpha \cdot h - \beta \cdot p$

$$\alpha \cdot h - \beta \cdot p = \dot{p}(t) \rightarrow \frac{1}{s} \rightarrow p(t)$$

$$0 = \alpha \cdot h - \beta \cdot p$$

$$\beta \cdot p = \alpha \cdot h$$

$$h = \frac{\beta \cdot p}{\alpha} = \frac{10 \cdot 8}{40} = 2 \text{ mm}$$

- d) Geben Sie die analytische Funktion $p(t)$ für ein sprungartiges Öffnen des Einlassventils von 0 auf $\hat{h} = 10 \text{ mm}$ an.

$$\hat{h} = h(t) = 10 \cdot 1(t) = H(s) = \frac{10}{s}$$

$$\text{Gesucht } p(t) \rightarrow P(s) = \frac{40}{(s+10)} \cdot \frac{10}{s} = \frac{400}{s(s+10)}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} p(t) = 400 \left[\frac{1}{10} (1 - e^{-10t}) \right] = \underline{\underline{40(1 - e^{-10t})}}$$

- e) Wie lange dauert es bis der Druckbehälter 80% befüllt ist, wenn das Einlassventil wie in Aufgabe d) beschrieben geöffnet wird? Ist diese Zeit abhängig von der Grösse der Ventilöffnung (Begründung)?

$$\hat{h} = 10 \text{ mm} \quad \hat{p} = G(0) \cdot \hat{h} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \hat{h} = \frac{40}{10} \cdot 10 = 40 \text{ bar}$$

$$80\% \rightarrow 0.8 \cdot 40 \text{ bar} = 32 \text{ bar}$$

$$32 = 40(1 - e^{-10t})$$

$$0.8 = 1 - e^{-10t}$$

$$e^{-10t} = 1 - 0.8$$

$$-10t = \ln(0.2)$$

$$t = \frac{\ln(0.2)}{-10} = \underline{\underline{0.161 \text{ s}}}$$

