

Zusammenfassung

Istwert Regelgrösse

Sollwert

Regeldifferenz

Regelglied

Stellglied

Regelstrecke

Messglied

Störgrösse

G_s Regelstrecke

G_r Regler

G_{ol} Offener Regelkreis

G_{cl} Geschlossener Regelkreis

Stabilität linearer Systeme

Eingang endlich gross,

ausgang endlich gross (explodiert nicht)

Hurwitz Kriterium Nenner von $G(s)$

System 2. Ordnung $a_2 s^2 + a_1 s + a_0$: System stabil, wenn alle Koeffizienten > 0

System 3. Ordnung $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$: System stabil, wenn alle

Koeffizienten > 0 und $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$

Wenn bsp. s^2 fehlt $a_2 = 0$ oder $-s$ steht $\rightarrow$ System instabil

Hurwitz Matrix: Standard System 3. Ordnung $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ $H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$

Hurwitz Kriterium - Systeme dritter Ordnung

■ Gegeben sei $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

■ Die Hurwitz-Matrix ist

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

■ Die Unterdeterminanten $\det(H_1)$, $\det(H_2)$ und $\det(H_3)$ sind

$$\det(H_1) = a_1$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3)$$

■ Gegeben sei $G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 1}$

■ Man hat $a_3 = 1 > 0$, $a_2 = 2 > 0$, $a_1 = 5 > 0$, $a_0 = 1 > 0$

■ Zudem hat man für die Unterdeterminanten

$$\det(H_1) = a_1 = 1 > 0$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = 9 > 0$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) = 9 > 0$$

■ System ist stabil

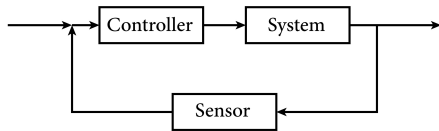
Blockschaltbildalgebra

Serienschaltung : $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

Parallelschaltung : $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

Kreisschaltung: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$

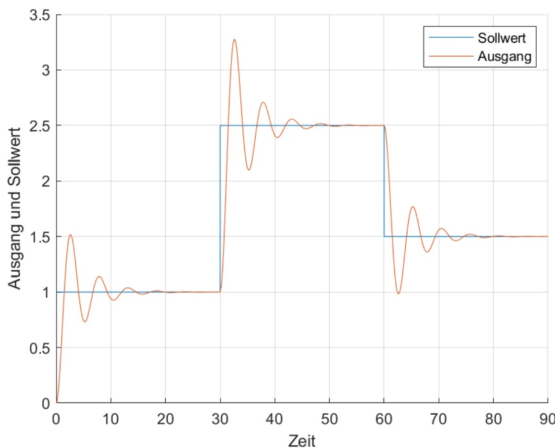
P-Regler



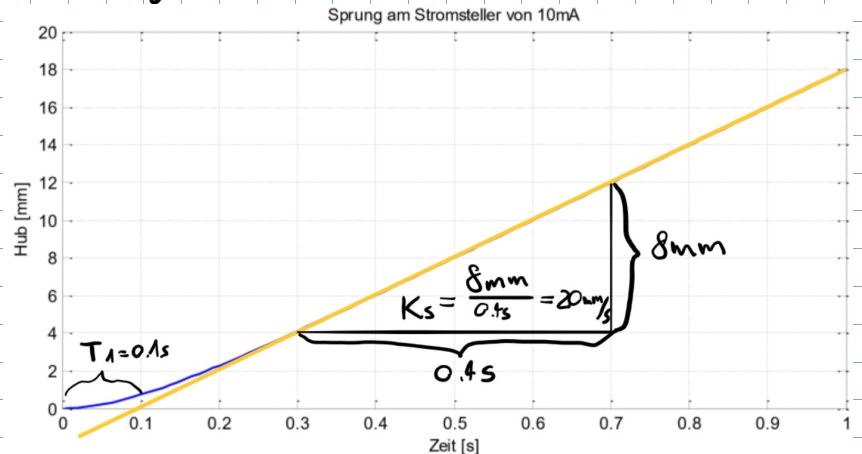
$$y(t) = K_p \cdot e(t)$$

$$e(t) = \frac{1}{1 + K_p \cdot K_s}$$

I-Regler

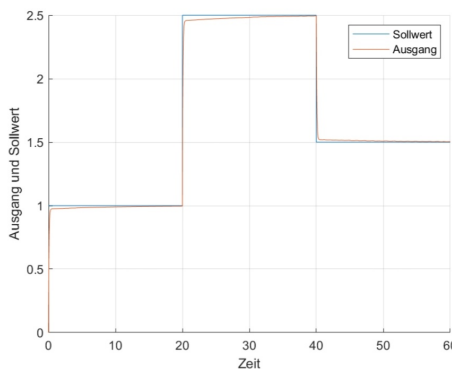


Schwingt sich zum endwert hin



PI-Regler

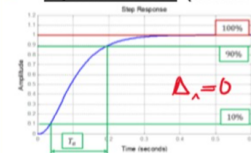
Summe von P und I regler



Gewünschtes Führungsverhalten

zhaw School of Engineering

- Gewünschtes Führungsverhalten $\hat{G}_{CL}$ mit Ordnung $l = m$ (Strecken-Ordnung m)
- Aperiodisch (ohne Überschwinger)

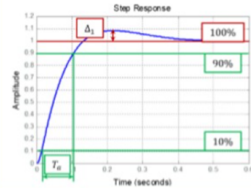


$$\hat{G}_{CL} = \frac{1}{(T_m s + 1)^l} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_m} + 1\right)^l}$$

$$\omega_m = \frac{1}{T_m}$$

l	$\alpha = T_A \omega_m$
1	2.2
2	3.4
3	4.2
4	4.9
5	5.6
6	6.1

- Schwingungsfähig (mit Überschwinger)



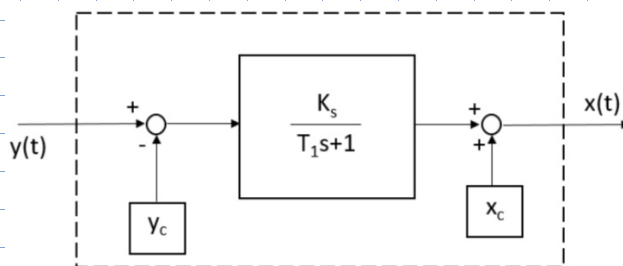
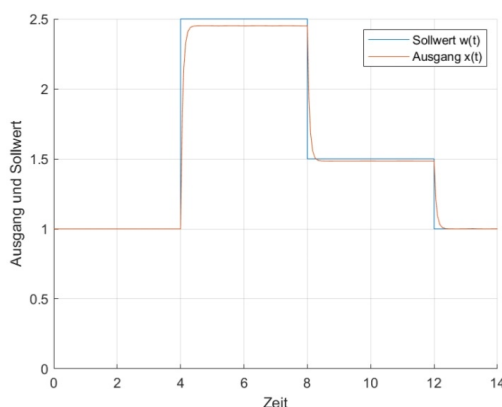
$$\hat{G}_{CL} = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_m} + 1\right)^{l-2}}$$

$$\omega_m \approx 5\omega_n$$

Anstiegszeit $T_a = t_{90\%} - t_{10\%}$

Δ_1 [%]	ζ [%]	$\alpha = T_A \omega_n$
0	100	3.4
5	69	2.1
10	59	1.8
15	52	1.7
20	46	1.6
25	40	1.5

P-Regler ohne Abweichung



Open und closed Loop

Open Loop (offener Regelkreis)

$$G_{ol}(s) = G_r(s) \cdot G_s(s)$$

Closed Loop (geschlossener Regelkreis)

$$G_{cl} = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)}$$

PD-Regler

$$G_r(s) = \frac{K_p + K_d s}{T_f s + 1}$$

$$\hat{G}_{cl}(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

PID-Regler

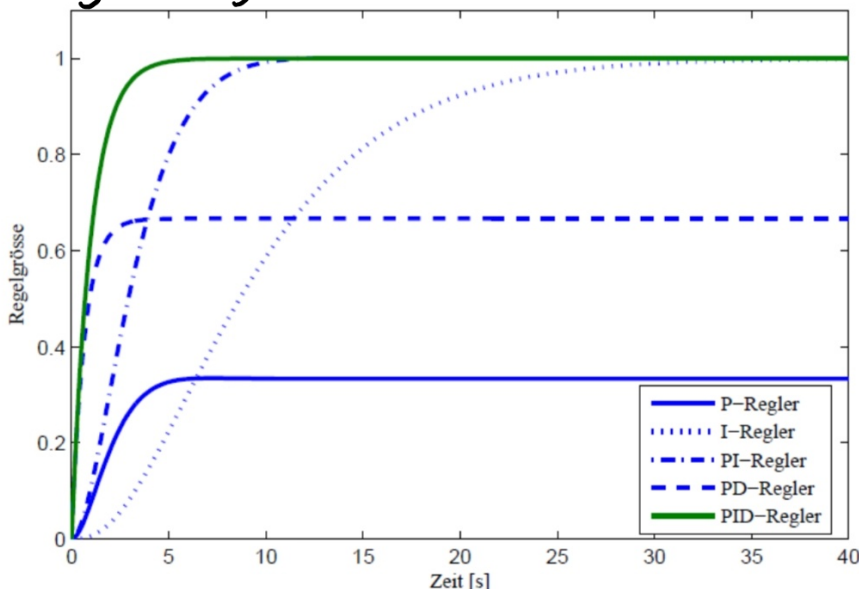
P - Reagiert sofort auf Fehler

I - Sorgt, dass am Ende keine bleibende Abweichung bleibt

D - Verhindert Überspringen und reagiert blitzschnell auf plötzliche Störung

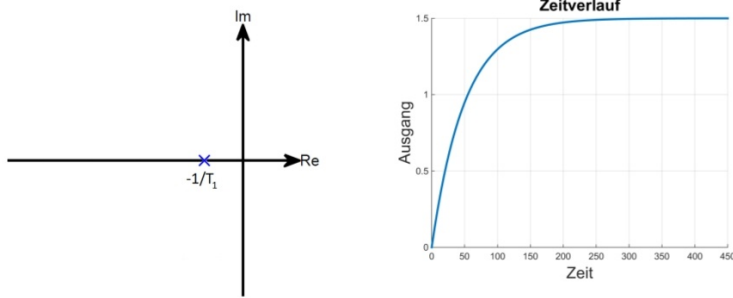
$$G_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v \cdot s \right) = \frac{K_p \cdot T_n \cdot T_v \cdot s^2 + K_p \cdot T_n \cdot s + K_p}{T_n \cdot s}$$

Reglervergleich



Pol / Nullstellenkompensation

Dominante Pole - PT1 Regelstrecken (LZ1)



- Regelstrecken mit dominanten Polen, d.h. mit grossen Zeitkonstanten T_1 , weisen ein "langsames" Zeitverhalten auf

$$G_s(s) = \frac{\hat{G}_s}{T_1 s + 1}$$

→ Pol bei

$$\hat{G}_{CL}(s) = G_{CL}(s) = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)}$$

$$G_r(s) = \frac{1}{G_s(s)} \cdot \frac{\hat{G}_{CL}(s)}{1 - \hat{G}_{CL}(s)}$$

Für PT1 $\frac{1}{T_m s + 1}$ $G_r(s) = \frac{1}{G_s(s) \cdot T_m \cdot s}$

$-\frac{1}{T_1}$ wenn T_1 sehr gross, System sehr langsam

Bsp. $G_s(s) = \frac{K_s}{T_1 s + 1}$, $\hat{G}_{CL}(s) = \frac{1}{T_m s + 1}$

$$G_r(s) = \frac{1}{G_s(s)} \cdot \frac{\hat{G}_{CL}(s)}{1 - \hat{G}_{CL}(s)} = \frac{T_1 s + 1}{K_s} \cdot \frac{\frac{1}{T_m s + 1}}{1 - \frac{1}{T_m s + 1}} = \frac{T_1 s + 1}{T_m \cdot K_s \cdot s}$$

Kompensation DC-Motor Systemgleichung aufstellen

Mechanisch: $J_m \dot{\omega} + b\omega = k_t i \xrightarrow{\mathcal{L}} s J_m \Omega(s) + b \Omega(s) = k_t I(s)$

Elektrisch: $L \dot{i} + R i = v - k_e \omega \xrightarrow{\mathcal{L}} s L I(s) + R I(s) = V(s) - k_e \Omega(s)$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{k_t}{(sL + R)(sJ_m + b) + k_t k_e}$$

Kompensationsmethode PT2 (Dominante Pole)

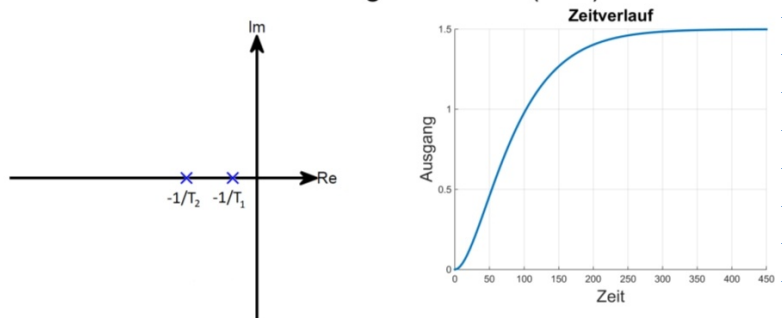
Wir wählen $T_n = T_1 \rightarrow G_{OL} = \frac{\hat{K}_p \cdot \hat{G}_s}{T_1 s}$

Lösung: Wir schalten PI Regler vor:

$$G_r(s) = \frac{K_p(T_n s + 1)}{T_n s}$$

$$G_{OL}(s) = G_r(s) G_s(s) = \frac{\hat{K}_p(T_n s + 1)}{T_n s} \cdot \frac{\hat{G}_s}{T_1 s + 1}$$

Dominante Pole - PT2 Regelstrecken (LZ2)



- Ähnliche Situation für PT2 Regelstrecken mit dominanten Polen oder grossen Zeitkonstanten T_1, T_2

$$G_s(s) = \frac{\hat{G}_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Lösung: Mit PID Regler Multiplizieren, Trick $T_n = T_1 + T_2$, $T_v = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2}$

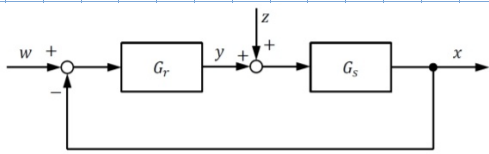
$$G_{OL}(s) = G_r(s) G_s(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right) \frac{\hat{G}_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} =$$

$$= \frac{\hat{K}_p(T_n T_v s^2 + T_n s + 1)}{T_n s} \frac{\hat{G}_s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

$$\rightarrow G_{OL}(s) = \frac{\hat{K}_p \cdot \hat{G}_s}{(T_1 + T_2)s}$$

Nicht Kausal, noch schnelles Glied hinzufügen

Allgemeine Kompensationsregel



$$G_{CL}(s) = \frac{G_r(s) G_s(s)}{1 + G_r(s) G_s(s)}$$

$$\rightarrow G_r(s) = \frac{1 \cdot \hat{G}_{CL}(s)}{G_s(s) \cdot (1 - \hat{G}_{CL}(s))}$$

Regelkreisanforderung

Stationäre Anforderung: Was macht unser System nach sehr langer Zeit

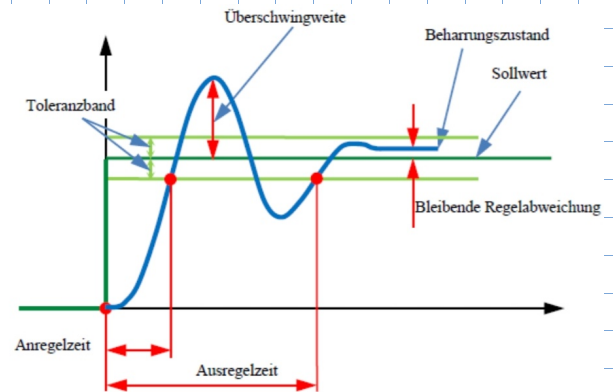
Ziel das bleibende Regelabweichung exakt Null wird!

Dynamische Anforderung

Überschwingweite: Wie weit schiesst Istwert über den Sollwert hinaus.

Anregelzeit: Wie lange dauert es, bis Istwert erstmal Sollwert kreuzt.

Ausregelzeit: Wie lange bis System beruhigt hat.



Regelstrecke mit ausgleichender Eigenschaft PT1-Strecke

P-Regler liefert nur Ausgangssignal wenn es einen Fehler gibt $y = K \cdot e$

Lösungsversuch: Proportionalverstärkung K_p sehr gross machen, in Realität nicht möglich.

Echte Lösung: I-Regler hinzufügen, I-Anteil integriert winzige Restfehler über Zeit bis Abweichung genau Null

Regelstrecke hat ein integrales Verhalten ohne Ausgleich I-Strecke

Konstantes Signal anlegen, Ausgang läuft immer weiter nach oben

P-Regler hinzufügen Sollwert erreicht $e=0$, $y = K \cdot 0 = 0$

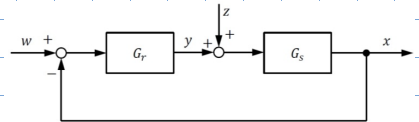
Regulierbarkeit T_s/T_u

Verzugszeit T_u , Ausgleichszeit T_s , Je kleiner Verhältniss, umso schwieriger zu regeln.
"Totzeit"

Störverhalten: Wie reagiert System wenn bei Sollwert plötzlich eine

$$G_{zx}(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_r(s) G_s(s)}$$

Störung z angreift.



Überlagerungsprinzip (Superposition): Wenn wir untersuchen wollen, was die Störung macht, setzen wir den Sollwert in der Rechnung $w=0$.

Polvorgabe: Wir geben gewünschtes Verhalten an, durch Pole. Bsp. schönes PT2-Verhalten.

1. Nenner des geschlossenen Regelkreises berechnen. bsp K_P, T_n

2. Gewünschtes Polynom aufstellen

3. Koeffizientenvergleich, vorfaktoren vergleichen s^2, s^1, s^0

Vorfilter Problem: Polvorgabe passt die Pole perfekt an, aber PI Regler zwingt Nullstelle auf.

Folge $\rightarrow$ Ungewollter Überschwinger beim Anfahren, Lösung: Vorfilter $G_v(s)$ direkt hinter Sollwert schalten.

$$G_v(s) = \frac{1}{T_n s + 1}$$

Aufgabe: PT1-Anlage mit PI-Regler, $K_S = 5, T_1 = 0.5s$,

$$\text{Übertragungsfunktion } G_s(s) = \frac{K_S}{T_1 s + 1} = \frac{5}{0.5s + 1} = \frac{b_0}{s + a_0}, b_0 = \frac{K_S}{T_1}, a_0 = \frac{1}{T_1}$$

$$\text{PI-Regler: } G_r(s) = \frac{K_P(T_n s + 1)}{T_n s} = \frac{d_1 s + d_0}{s}, d_1 = K_P : \text{P-Anteil}, d_0 = \frac{K_P}{T_n} : \text{I-Anteil}$$

$$\text{Polvorgabe: } 1 + G_r(s) \cdot G_s(s) = 0 = 1 + \frac{d_1 s + d_0}{s} \cdot \frac{b_0}{s + a_0} = 0 \rightarrow s^2 + (a_0 + b_0 d_1) s + b_0 d_0 = 0$$

$$\text{Polstellen: } (s - p_1)(s - p_2) = s^2 + (-p_1 - p_2)s + p_1 p_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Koeffizientenvergleich: } a_0 + b_0 d_1 = -p_1 - p_2 \\ b_0 d_0 = p_1 p_2 \end{array} \right\} d_1 = \frac{-p_1 - p_2 - a_0}{b_0}, d_0 = \frac{p_1 p_2}{b_0}, K_P = d_1, T_n = \frac{d_1}{d_0}$$

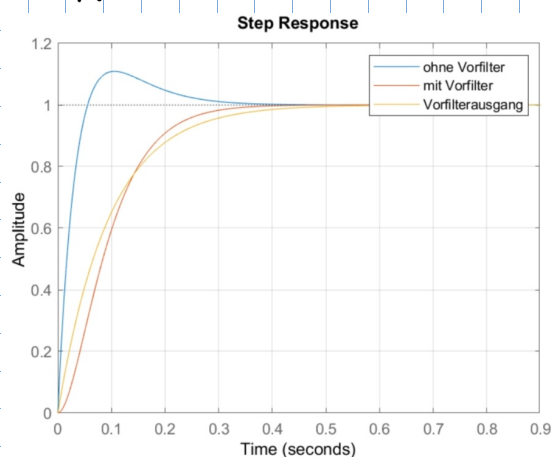
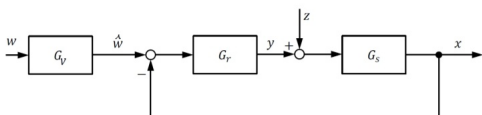
Führungsverhalten:

$$G_{wx} = \frac{\frac{d_1 s + d_0}{s} \cdot \frac{b_0}{s + a_0}}{1 + \frac{d_1 s + d_0}{s} \cdot \frac{b_0}{s + a_0}} = \frac{b_0(d_1 s + d_0)}{s^2 + (a_0 + b_0 d_1)s + b_0 d_0}$$

Numerische Parameter: $K_S = 5, T_1 = 0.5, p_1 = -20, p_2 = -20$

$$\text{Vorfilter: } G_v = \frac{d_0}{d_1 s + d_0}$$

$$G_{wx} = \frac{d_0}{d_1 s + d_0} \cdot \frac{\frac{d_1 s + d_0}{s} \cdot \frac{b_0}{s + a_0}}{1 + \frac{d_1 s + d_0}{s} \cdot \frac{b_0}{s + a_0}} = \frac{b_0 d_0}{s^2 + (a_0 + b_0 d_1)s + b_0 d_0}$$



Einstellverfahren und erweiterte Reglerstrukturen

P-Anteil (K_p hochdrehen): Macht das System schneller (Anregelzeit sinkt)
Aber System schwingt stärker über und wird nervös.

I-Anteil (T_n verkleinern): I-Anteil wird stärker, wenn Nachstellzeit T_n kleiner wird ($K_i = K_p/T_n$)
Ein starker I-Anteil killt die bleibende Reglerabweichung, macht das System aber träger und erhöht Überschwing.

D-Anteil (T_v hochdrehen): Wirk wie ein Stossdämpfer. Reduziert das Überschwingen extrem und macht das System stabiler.

Ziegler und Nichols 1 (Sprungantwort)

Experiment: Sprung im Offenen Kreis ohne Regler, Wendetangente einzeichnen.

Werte: Verzugszeit T_u und Ausgleichszeit T_g ablesen $\rightarrow$ ZN1-Tabelle

P-Regler	$K_p = 1.0 \frac{T_g}{K_s T_t}$	ZN1 Tabelle	
PI-Regler	$K_p = 0.9 \frac{T_g}{K_s T_t}$	$T_n = 3.3 T_t$	
PID-Regler	$K_p = 1.2 \frac{T_g}{K_s T_t}$	$T_n = 2.0 T_t$	$T_v = 0.5 T_t$

Ziegler und Nichols 2 (Stabilitätsgrenze)

Experiment: Geschlossenen Reglerkreis bauen, nur mit P-Regler, K_p langsam hochdrehen, bis Anlage von alleine ununterbrochen schwingt. (Rand der Instabilität)

Werte: K_p heisst dann K_{krit} und die Dauer einer Schwingung $T_{krit} \rightarrow$ ZN2 Tabelle

$$T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}}$$

CHR

	Aperiodischer Regelvorgang						Regelvorgang mit 20% Überschwingen					
	Führungsverhalten			Störverhalten			Führungsverhalten			Störverhalten		
	K_p	T_n	T_v	K_p	T_n	T_v	K_p	T_n	T_v	K_p	T_n	T_v
P	$\frac{0.3T_g}{K_s T_u}$	—	—	$\frac{0.3T_g}{K_s T_u}$	—	—	$\frac{0.7T_g}{K_s T_u}$	—	—	$\frac{0.7T_g}{K_s T_u}$	—	—
PI	$\frac{0.35T_g}{K_s T_u}$	$1.2T_g$	—	$\frac{0.6T_g}{K_s T_u}$	$4T_u$	—	$\frac{0.6T_g}{K_s T_u}$	T_g	—	$\frac{0.7T_g}{K_s T_u}$	$2.3T_u$	—
PID	$\frac{0.6T_g}{K_s T_u}$	T_g	$0.5T_u$	$\frac{0.95T_g}{K_s T_u}$	$2.4T_u$	$0.42T_u$	$\frac{0.95T_g}{K_s T_u}$	$1.35T_g$	$0.47T_u$	$\frac{1.2T_g}{K_s T_u}$	$2T_u$	$0.42T_u$

P-Regler	$K_p = 0.50 K_{krit}$		
PI-Regler	$K_p = 0.45 K_{krit}$	$T_n = 0.85 T_{krit}$	
PID-Regler	$K_p = 0.60 K_{krit}$	$T_n = 0.50 T_{krit}$	$T_v = 0.12 T_{krit}$

Bode bei $-180^\circ \omega_{krit}$

Latzel: Ablesen wann Sprungantwort 10%, 50%, 90% ihres Endwertes erreicht hat.

μ	n	a_{10}	a_{50}	a_{90}
0.137	2	1.880	0.596	0.257
0.174	2.5	1.245	0.460	0.216
0.207	3	0.907	0.374	0.188
0.261	4	0.573	0.272	0.150
0.304	5	0.411	0.214	0.125
0.340	6	0.317	0.176	0.108
0.370	7	0.257	0.150	0.095
0.396	8	0.215	0.130	0.085
0.418	9	0.184	0.115	0.077
0.438	10	0.161	0.103	0.070

$$T_m = \frac{a_{10\%} t_{10\%} + a_{50\%} t_{50\%} + a_{90\%} t_{90\%}}{3}$$

Latzel PI

n	$\frac{T_n}{T_m}$	$K_p K_s$ 10% Überschwingen	$K_p K_s$ 20% Überschwingen
2	1.55	1.650	2.603
2.5	1.77	1.202	1.683
3	1.96	0.884	1.153
4	2.30	0.656	0.812
5	2.59	0.540	0.654
6	2.86	0.468	0.561
7	3.10	0.417	0.497
8	3.32	0.379	0.451
9	3.53	0.349	0.413
10	3.73	0.325	0.384

Latzel PID

n	$\frac{T_n}{T_m}$	$\frac{T_v}{T_m}$	$K_p K_s$ 10% Überschwingen	$K_p K_s$ 20% Überschwingen
3	2.47	0.66	2.543	3.510
3.5	2.71	0.76	1.832	2.522
4	2.92	0.84	1.461	1.830
5	3.31	0.99	1.109	1.337
6	3.66	1.13	0.914	1.082
7	3.97	1.25	0.782	0.922
8	4.27	1.36	0.689	0.812
9	4.54	1.47	0.617	0.727
10	4.80	1.57	0.559	0.660

$$\text{Aperiodisch} = (T_m s + 1)^2 = 0$$

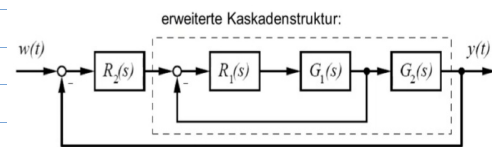
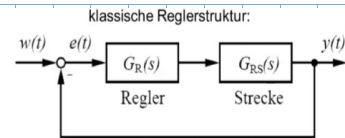
Kaskadenregelung

Besteht aus Verschachtelung von einschleifigen Regelkreisen

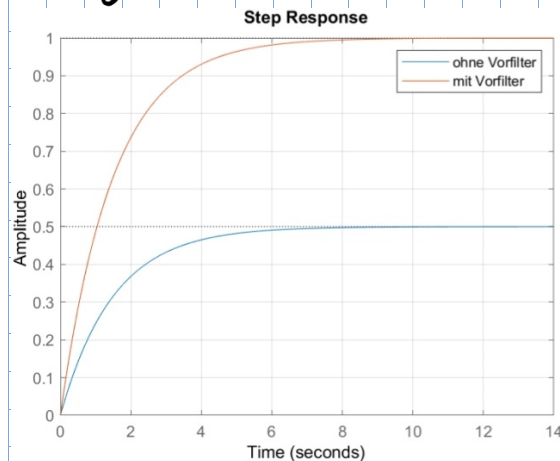
Jede Teilstrecke wird von einem Regler kontrolliert.

Immer von Innen nach aussen ausgelegt.

Innerer Regelkreis regelt störungen schnell weg



P-Regler mit Vorfilter



$$\text{Vorfilter } G_V = \frac{1 + K_S K_P}{K_S K_P}$$

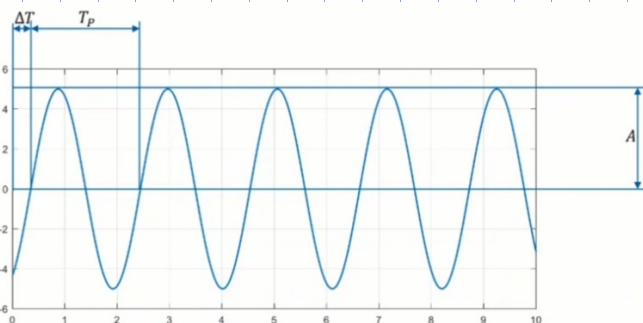
Fourier Transformation

Jedes Signal lässt sich als Summe von Sinusen und Cosinussen zusammenbauen.

- $\omega = 2\pi f, T_p = 1/f$
- Für die Phasenverschiebung gilt $\Phi = -\frac{\Delta T}{T_p} 2\pi$
- $y = A \cdot \sin(2\pi \frac{t}{T_p} - \frac{\Delta T}{T_p} 2\pi) = A \cdot \sin(\omega t + \Phi)$

$$s = j\omega$$

Amplitude $A = 5$
 Kreisfrequenz $\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 $T_p = \frac{2\pi}{3} = 2.1 \text{ s}$
 Phasenverschiebung $\phi = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
 $\Delta T = \frac{3}{2\pi} 2.1 \text{ s} = 0.35 \text{ s}$
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_p}$



- Alternative Form für die Darstellung der Fourierreihe

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \Phi_k)$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega_0 t + \Theta_k)$$

- Es gilt:

$$C_0 = A_0 \quad k=0$$

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad k=1, 2, \dots$$

$$\Phi_k = \arctan \frac{-B_k}{A_k}$$

- Für $k=0$ ist C_0 der Mittelwert des Signals, $k=1$ ist die Grundwelle, $k>1$ sind die Oberwellen

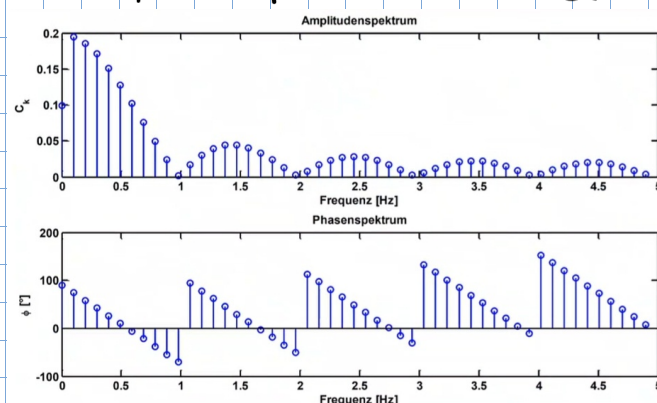
Gibbs Phänomen: Überschwinger



- $y = A \cdot \sin(\omega t + \Phi)$, A ist die Amplitude (zero-peak), ω ist die Kreisfrequenz (rad/s), Φ ist die Phasenverschiebung (rad)

- T_p ist die Periodendauer (s), ΔT ist die Zeitverschiebung, f ist die Frequenz (Hz)

Linienpektrum: Höhe des Striches = C_k



Vorgehen Fourier $\frac{\pi}{2} \rightarrow \omega=4$ π -Periodisch oder 2π -Period

1. Periodizität Bestimmen $\omega=2$

2. Kreisfrequenz Berechnen $\omega = \frac{2\pi}{T} / T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega=1$

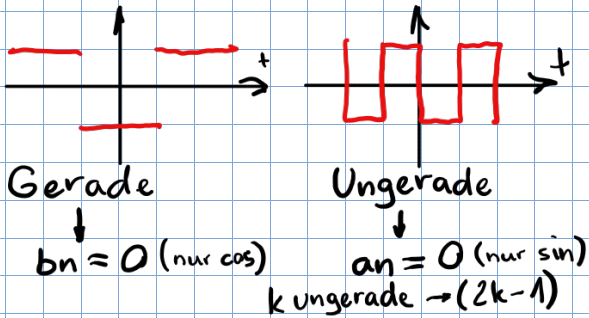
$$\int_0^{2\pi} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$$

S. 190

S. 316

Reel

Gerade oder Ungerade



Ist Funktion

Weder

Komplex

$$\hat{f}_k = a \cdot j b$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(\hat{f}_k)$$

$$b_n = -2 \cdot \text{Im}(\hat{f}_k)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t}$$

Komplexe Fourier-Reihe $f(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$\frac{a_0}{2} = \text{Mittelwert von } f(t)$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot t \cdot \omega) + b_n \cdot \sin(n \cdot t \cdot \omega))$$

Reelle Fourier-Reihe $f(t)$

Intervallgrenzen müssen immer über eine ganze Periode gehen! Grenzen verschiebbar!

Partielle Integration $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$$\int 0 dt = c \quad \int_a^b 0 dt = 0 \quad \int_b^a e^{-kj t} dt = \frac{e^{-kj t}}{-k \cdot j} \Big|_b^a$$

$$e^{-jk2\pi} = e^{jk0} = 1$$

$$e^{-jk\varphi} = \cos(k\varphi) - j \cdot \sin(k \cdot \varphi)$$

$$\int_b^a -\sin(k \cdot t) dt = \cos(k \cdot t) \cdot \frac{1}{k} \Big|_b^a$$

$$\sin(n \cdot \pi) = 0$$

$$\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$$

Korrekte Darstellung:

$$\frac{4}{\pi k \cdot j} = \frac{4}{\pi \cdot k} \cdot \frac{1}{j} = -\frac{4}{\pi k} \cdot j$$

$$\text{Re} = 0$$

$$\text{Im} = -\frac{4}{\pi k}$$

Frequenzgang: Zusammenhang zwischen Ein-Ausgangssignal

$$G(j\omega) = \frac{\hat{x}_a(t)}{\hat{x}_e(t)} = \frac{\hat{x}_a \cdot e^{j\phi}}{\hat{x}_e}$$

Wenn $G(s)$ vorhanden, jedes s mit $j\omega$ ersetzen

Erst wenn das System eingeschwungen ist.

System kann Frequenz nicht ändern, nur Höhe verändern + welle zeitlich verschieben.

Wir füttern ein System mit einem Sinus in ein stabiles System, nachdem es sich eingeschwungen hat, kommt hinten immer exakter Sinus raus.

Abhängig von ω Mit steigender Frequenz wird Amplitude beliebig klein

Mit steigender Frequenz nähert sich Phasenverschiebung $-\frac{\pi}{2}$

PT1: $G(s) = \frac{K_s}{T_1 \cdot s + 1} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K_s}{T_1 j\omega + 1} = \frac{1}{0.1 j\omega + 1}$, bsp $\omega = 10 \text{ rad/s}$ $G(10j) = \frac{1}{j + 1}$

Amplitudengang Faktor 10 = 20dB

$L_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} \right)$ $\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} = \text{Amplitudenverhältnis}$

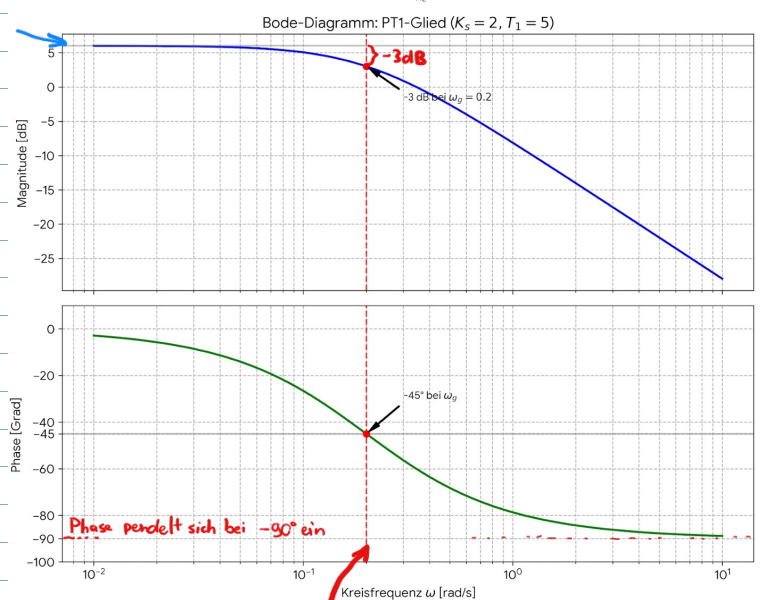
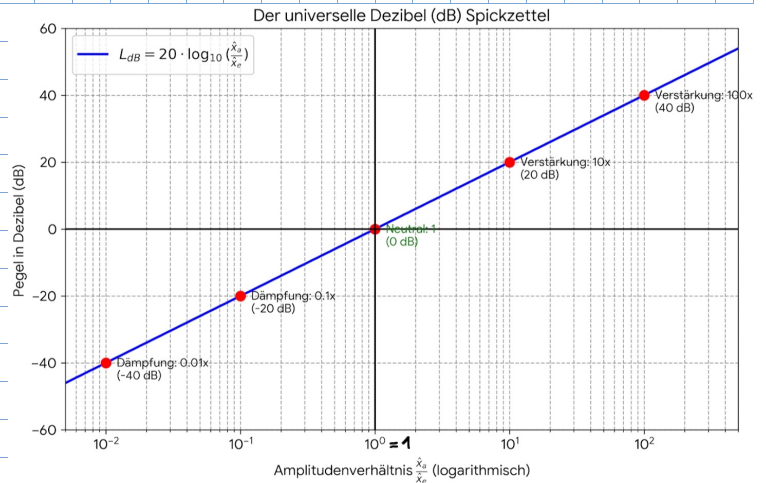
Bode diagramm

Logarithmisch: Multiplikation wird zur Addition

$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = A_1 e^{j\phi_1} \cdot A_2 e^{j\phi_2} = A e^{j\phi}$

Bsp. PT1 $K_s = 2, T_1 = 5$

$L_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(2) = \underline{+6dB}$



Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ rad/s}$

Blockschaltbildalgebra

Serienschaltung

$\hat{x} \rightarrow [G_1] \rightarrow [G_2] \rightarrow \hat{y}$ $G_{ges} = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = G_1 \cdot G_2$

Parallelschaltung

$\hat{x} \rightarrow \begin{cases} [G_1] \\ [G_2] \end{cases} \rightarrow \hat{y}$ $G_{ges} = G_1 + G_2$

Kreisschaltung

$\hat{x}_e(s) \rightarrow \begin{cases} + \\ - \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [G_1(s)] \\ [G_2(s)] \end{cases} \rightarrow \hat{x}_a(s)$ $G(s) = \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$

Bode Ks (Konstant bei 20db)

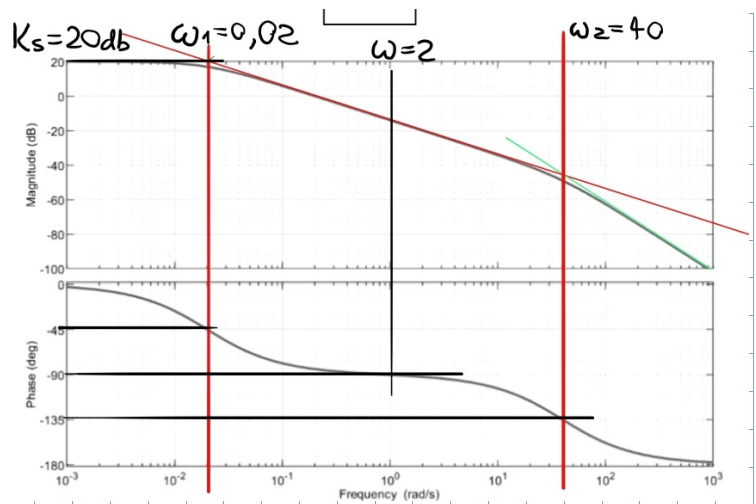
$$K_s = 10^{\frac{20}{20}} = 10^{\frac{20}{20}} = 10 \text{ m/s/N}$$

Bode Polstellen

Wo ein Knick knick nach unten (rechts) ist, wo es rund wird!

$$\omega_1 = 0,02 \rightarrow p_1 = -0,02$$

$$\omega_2 = 40 \rightarrow p_2 = -40$$



Bode Nullstellen Wo ein Knick nach oben (links) ist

Allgemeine Zeitkonstantenform für ein System ohne Nullstellen und zwei Polstellen

$$G(s) = \frac{K_s}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad T_1 = \frac{1}{\omega_1}, T_2 = \frac{1}{\omega_2}$$

Am Ausgang wurde im eingeschwungenen Zustand eine sinusförmige Geschwindigkeit gemessen:
 $v(t) = 2 \cdot \sin(2t + \pi)$
 Das Eingangssignal sieht wie folgt aus: $F(t) = \hat{F} \cdot \sin(2t + \varphi)$

e) Wie gross ist die Amplitude der Kraft $\hat{F}$ am Eingang?

$$v(t) = 2 \cdot \sin(2t + \pi) \quad \text{Bode Diagramm bei } \omega = 2 \rightarrow -20\text{dB}$$

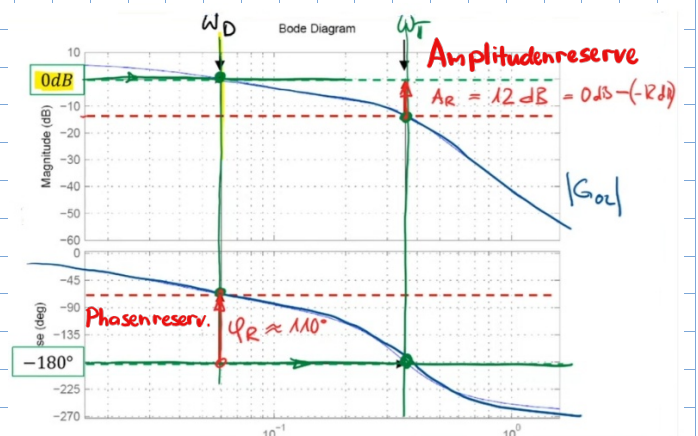
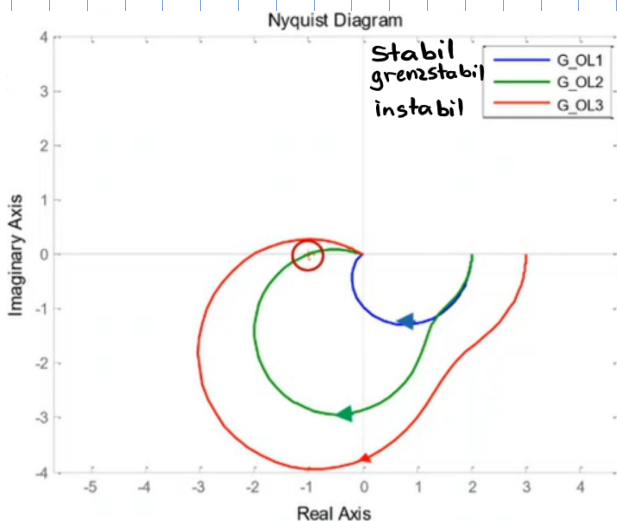
$$\hat{v} = 2 \quad \omega = 2 \quad G(2j) = 10^{-\frac{20}{20}} = 0,1 \quad \hat{F} = \hat{v} \cdot G(2j) \rightarrow \hat{F} = \frac{\hat{v}}{G(2j)} = \frac{2}{0,1} = 20\text{N}$$

f) Wie gross ist die Phasenlage φ des Kraftsignals?

$$\text{Bode } \omega = 2 \rightarrow -90^\circ \quad G(2j) = -\frac{\pi}{2} = \varphi_v - \varphi_f$$

$$\varphi_f = \varphi_v + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Nyquistkriterium



$$12\text{dB nach oben} \quad K_p = 10^{\frac{12}{20}} = 3,98 \times \text{grösser}$$

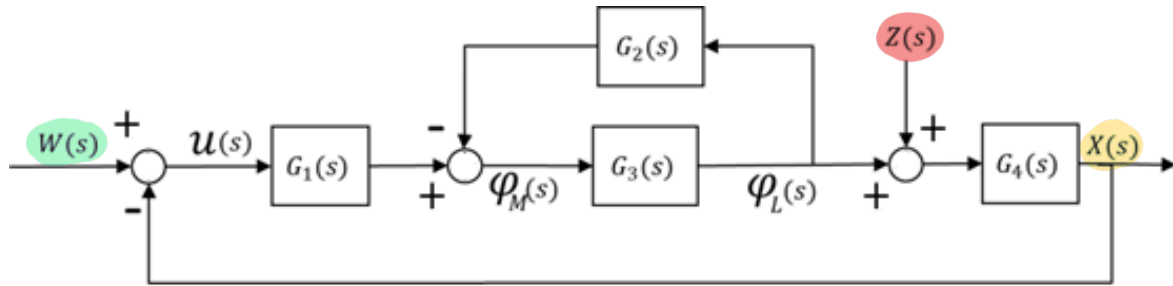
$$G_{a,\text{neu}}(s) = K_p \cdot G_{a,\text{alt}}(s)$$

$$K = 10^{\frac{\text{Reserve dB}}{20}} \rightarrow \text{Grenzstabil}$$

$$|G_{a,\text{neu}}|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(K_p) + |G_{a,\text{alt}}|_{\text{dB}}$$

1. Blockschaltbild Algebra

Betrachten Sie den unten dargestellten Regelkreis:



Führungsverhalten $\frac{X}{W}$

Störverhalten $\frac{X}{Z}$

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\varphi_M(s)/u(s)$
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\varphi_L(s)/u(s)$
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\varphi_L(s)/\varphi_M(s)$
- Haben die Übertragungsfunktionen aus Teilaufgaben a) und b) etwas gemeinsam?
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $X(s)/W(s)$, wenn $Z(s) = 0$ und $G_2(s) = 0$
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $X(s)/Z(s)$, wenn $W(s) = 0$ und $G_2(s) = 0$

a) $\frac{\varphi_M}{u_s}$ $\varphi_M = u_s \cdot G_1 - \varphi_L \cdot G_2$ $\varphi_M = u_s \cdot G_1 - \varphi_M \cdot G_3 \cdot G_2$ $\frac{\varphi_M}{u_s} = \frac{G_1}{1 + G_2 \cdot G_3}$

b) $\frac{\varphi_L}{u_s}$ $\varphi_L = \varphi_M \cdot G_3$ $\varphi_L = u_s \cdot G_1 \cdot G_3 - \varphi_L \cdot G_2 \cdot G_3$ $\frac{\varphi_L}{u_s} = \frac{G_1 \cdot G_3}{1 + G_2 \cdot G_3}$

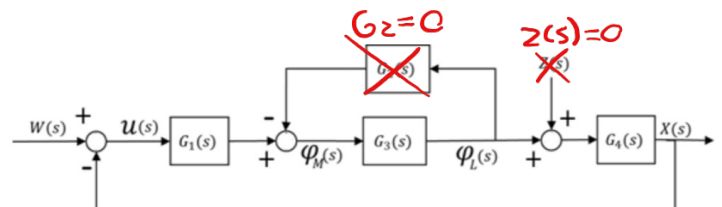
c) $\frac{\varphi_L}{\varphi_M} = \frac{u_s \cdot G_1 \cdot G_3 - \varphi_L \cdot G_2 \cdot G_3}{u_s \cdot G_1 - \varphi_L \cdot G_2} = \frac{G_3(u_s \cdot G_1 - \varphi_L \cdot G_2)}{u_s \cdot G_1 - \varphi_L \cdot G_2} = G_3$ d) Gleicher Nenner

e) $\frac{X(s)}{W(s)}$, $Z(s) = 0$, $G_2(s) = 0$

$X(s) = G_4 \cdot \varphi_L$
 $\varphi_L = \varphi_M \cdot G_3$ } $X(s) = G_4 \cdot G_3 \cdot \varphi_M$
 $\varphi_M = u(s) \cdot G_1$ } $X(s) = G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot u(s)$

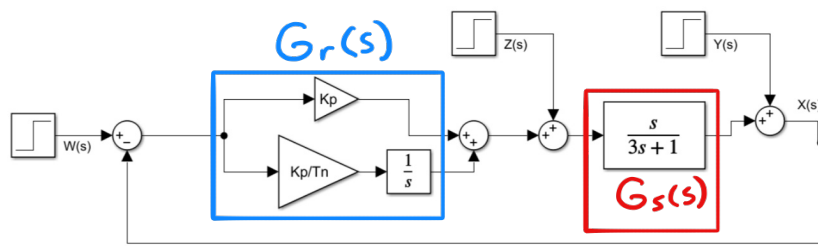
$u(s) = W(s) - X(s) \rightarrow X(s) = G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot (W(s) - X(s))$

$X(s)(1 + G_1 \cdot G_3 \cdot G_4) = G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot W(s) \rightarrow \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_4}{1 + G_1 \cdot G_3 \cdot G_4}$



5. Polvorgabe

Gegeben sei die Regelungsstruktur in der Abbildung unten:



$$G_s(s) = \frac{s}{3s+1}$$

$$G_r(s) = K_p + \frac{K_p}{T_n \cdot s}$$

- a) Bestimmen Sie K_p und T_n so dass die Übertragungsfunktion $G_1(s) = X(s)/W(s)$ vom geschlossenen Regelkreis eine Nullstelle bei -1 und eine Polstelle bei -0.6 besitzt.

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{W(s)} \quad G_{CL} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{\left(K_p + \frac{K_p}{T_n \cdot s}\right) \cdot \left(\frac{s}{3s+1}\right)}{1 + \left(K_p + \frac{K_p}{T_n \cdot s}\right) \cdot \left(\frac{s}{3s+1}\right)} = \frac{K_p (T_n \cdot s + 1)}{(s \cdot K_p + 3s + 1) \cdot T_n + K_p}$$

Nullstelle Zähler = 0 $K_p (T_n \cdot s + 1) = 0$ K_p darf nicht = 0 sein!

$$\rightarrow T_n \cdot s + 1 = 0 \quad (s = -1) \rightarrow T_n(-1) + 1 = 0 \rightarrow \underline{T_n = 1}$$

Polstelle Nenner = 0 $(s \cdot K_p + 3s + 1) \cdot T_n + K_p = 0 \quad (s = -0.6, T_n = 1)$

$$\rightarrow -0.6 \cdot K_p + 3 \cdot (-0.6) + 1 + K_p = 0 \rightarrow -\frac{4}{5} + \frac{2}{5} K_p = 0 \rightarrow \underline{K_p = 2}$$

- b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s) = X(s)/Z(s)$ und die Übertragungsfunktion $G_3(s) = X(s)/Y(s)$.

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{s}{3s+1}}{1 + \underbrace{G_r(s) \cdot G_s(s)}} = \frac{s}{5s+3}, \quad G_3(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2(s+1)}{3s+1}} = \frac{3s+1}{5s+3}$$

Bei Störung Nenner immer $1 + G_r(s) \cdot G_s(s)$

- c) Was sind die statischen Verstärkungen von $G_2(s)$ und $G_3(s)$?

$$G_2(0) = 0, \quad G_3(0) = \frac{1}{3}$$

- d) Was ist der Endwert des Ausgangs $X(s)$ für einen gleichzeitigen Einheitssprung bei $W(s)$ und $Z(s)$?

$$G_1(s) = \frac{X}{W} \quad G_1(s) \cdot W(s) = X(s) \rightarrow X(s) = \frac{1}{3} \cdot G_1(s)$$

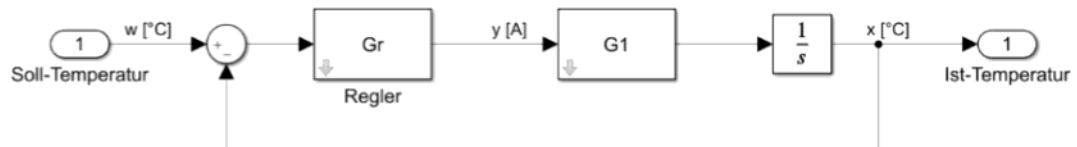
$$G_2(s) = \frac{X}{Z} \quad G_2(s) \cdot Z(s) = X(s) \rightarrow X(s) = \frac{1}{5} \cdot G_2(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+2}{5s+3} + \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{5s+3} = \frac{2}{3} + 0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

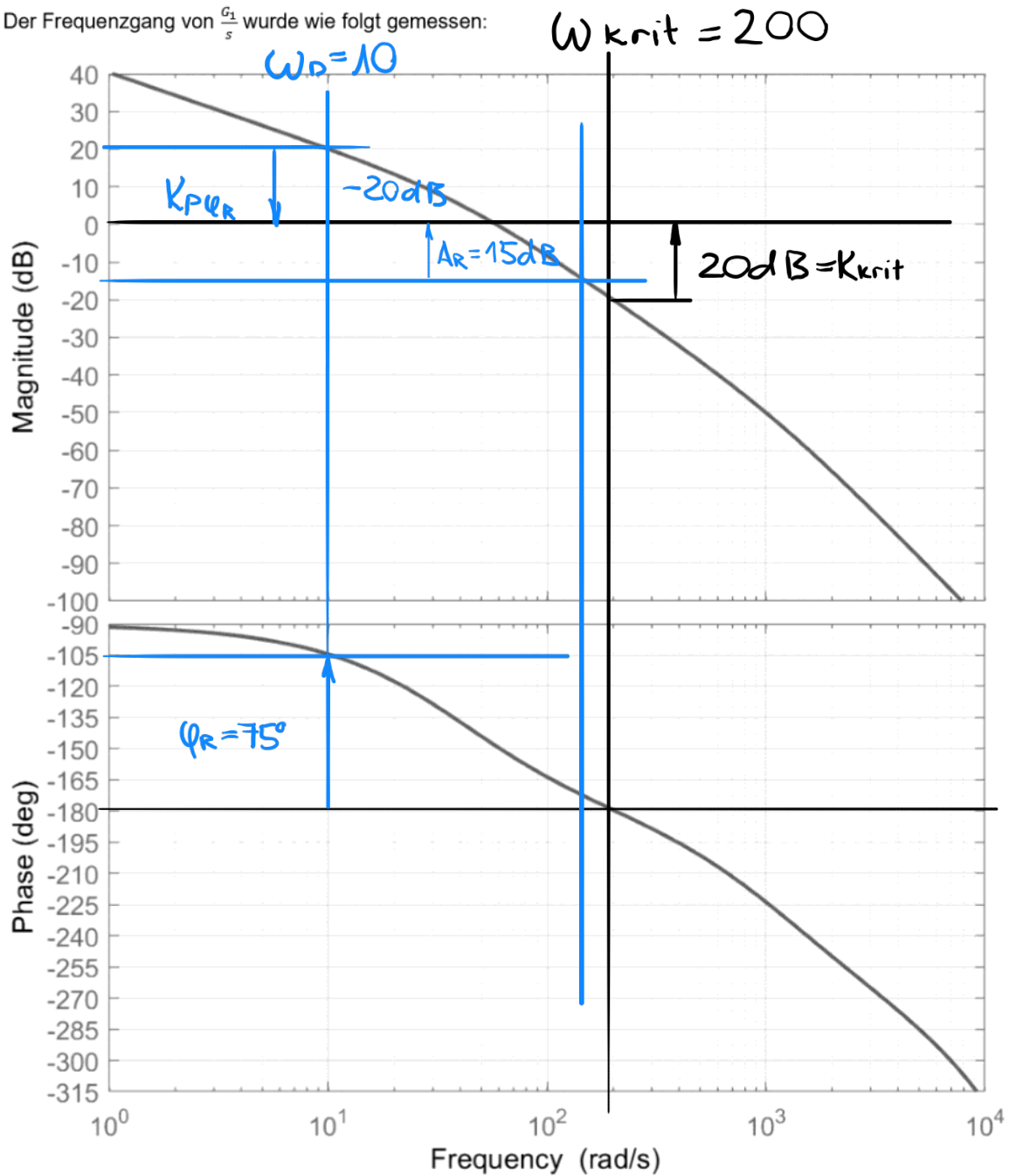
Reglerauslegung im Frequenzbereich

16 Punkte

Ein Regelkreis besteht aus einem Regler G_r und einer Regelstrecke bestehend aus G_1 und einem Integrator gemäss folgendem Blockschaftbild:



Der Frequenzgang von $\frac{G_1}{s}$ wurde wie folgt gemessen:



- a) Bestimmen Sie die numerische Übertragungsfunktion $G_r(s)$ eines PI-Regler nach der Einstellmethode von Ziegler-Nichols nach der Methode der kritischen Verstärkung.

8 Punkte

$$\omega_{krit} = 200, K_{krit} = 20 \text{ dB} \quad K_{rit} = 10^{\frac{20}{20}} = 10$$

$$K_p = 0.45 \cdot 10 = 4.5 \quad T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}} = \frac{2\pi}{200} = 0.0314 \text{ s} \quad T_n = 0.85 \cdot T_{krit}$$

$$G_r(s) = \frac{K_p(T_n s + 1)}{T_n s} = \frac{4.5(0.0267s + 1)}{0.0267s} \quad \begin{aligned} &= 0.85 \cdot 0.0314 \\ &= 0.0267 \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die proportionale Verstärkung K_p inkl. physikalische Einheit eines P-Reglers, so dass die Amplitudenreserve mindestens 15 dB und die Phasenreserve mindestens 75° beträgt. Bestimmen Sie K_p so, dass der geschlossene Regelkreis **grösstmögliche Bandbreite** hat und beide Stabilitätsreserven eingehalten werden.

8 Punkte

$$\text{Phasenreserve: } \varphi_R = 75^\circ \rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$K_p = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1 \text{ A/}^\circ\text{C}$$

$$\text{Amplitudenreserve: } K_p = 10^{\frac{5}{20}} = 1.78 \text{ A/}^\circ\text{C}$$

Grösstmögliche Bandbreite $\rightarrow$ Das kleinere $K_p = 0.1 \text{ A/}^\circ\text{C}$