

1. Hauptsatz der Thermodynamik - Bilanzierung

$$\frac{dU}{dt} = I_{W,th} + I_{W,mech}$$

Differentialform

U : Innere Energie des Systems [J]

$\frac{dU}{dt}$: Zeitliche Änderung der inneren Energie [W]

$I_{W,th}$: Thermische Leistung (zu-/ abgeführte Wärme) [W] -> Tabelle entnehmen

$I_{W,mech}$: Mechanisch zu-/ abgeführte Leistung [W]

$$\Delta U = W_{th,12} + W_{mech,12}$$

Integralform

ΔU : Änderung der inneren Energie zwischen Zustand 1 und 2 [J]

$W_{th,12}$: Thermische Energie (zu-/ abgeführte Wärme) im Prozess 1 -> 2 [J]

$W_{mech,12}$: Mechanisch zu-/ abgeführte Arbeit im Prozess 1 -> 2 [J]

Zugeführte Wärmeenergie – geleistete Arbeit = ΔU

$$W_{mech,12}^{rev} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Reversible mech. Volumenarbeit

$W_{mech,12}^{rev}$: reversible mechanische Arbeit von Zustand 1 nach 2 [J]

p : (System-)Druck als Funktion des Volumens entlang des reversiblen Prozesses [Pa]

V : Volumen (Integrationsvariable) [m³]

V_1 : Anfangsvolumen im Zustand 1 [m³]

V_2 : Endvolumen im Zustand 2 [m³]

dV : infinitesimale Volumenänderung [m³]

$$\Delta U = W_{th,12} - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Änderung der inneren Energie

Zugeführte Wärmeenergie – Volumenarbeit = ΔU

ΔU : Änderung der inneren Energie zwischen Zustand 1 und 2 [J]

U : innere Energie des Systems [J]

$W_{th,12}$: therm. Arbeit / Wärmeübertrag von Zustand 1 nach 2 [J]

$$H = U + pV$$

Enthalpie

H : Enthalpie des Systems [J]

U : innere Energie des Systems [J]

p : Druck [Pa]

V : Volumen [m³]

$$\frac{dH}{dt} = I_{W,th}$$

Δ/t Enthalpie = Wärmestrom

$\frac{dH}{dt}$: zeitliche Änderungsrate der Enthalpie [W = J/s]

H : Enthalpie des Systems [J]

t : Zeit [s]

$I_{W,th}$: Wärmestrom / Wärmeleistung (Wärmeübertrag pro Zeit) ins System [W]

$$\Delta H = W_{th,12}$$

Enthalpieänderung

ΔH : Enthalpieänderung von Zustand 1 nach 2 [J]

$W_{th,12}$: Wärmeübertrag ins System von Zustand 1 nach 2 [J]

$$\Delta U = m \bar{c}_v \Delta T$$

$$\Delta H = m \bar{c}_p \Delta T$$

Kalorische Zustandsgleichung für ideale **Gase**

$\bar{c}_v$ & $\bar{c}_p$ auf Seite 2

ΔU : Änderung der inneren Energie ideales **Gas** [J]

m : Masse des Stoffsystems [kg]

$\bar{c}_v$: (mittlere) spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen [J/(kg K)]

ΔT : Temperaturänderung [K]

T : Temperatur [K]

ΔH : Änderung der Enthalpie [J]

$\bar{c}_p$: (mittlere) spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck [J/(kg K)]

$$\Delta U = m \bar{c}_{L/S} \Delta T$$

$$\Delta H = m \bar{c}_{L/S} \Delta T + V \Delta p$$

Kalorische Zustandsgleichung für **Feststoffe** und **Flüssigkeiten**

Bei ΔH kommt zusätzlich ein **Druckanteil**: $V \Delta p$ dazu ~ 0

ΔU : Änderung der inneren Energie [J]

m : Masse des Stoffsystems [kg]

$\bar{c}_{L/S}$: (mittlere) spezif. Wärmekapazität der **Flüssigkeit** bzw. des **Festkörpers** [J/(kg K)]

ΔT : Temperaturänderung [K]

T : Temperatur [K]

ΔH : Änderung der Enthalpie [J]

V : Volumen des Systems (typisch als konstant angenommen) [m³]

Δp : Druckänderung [Pa]

p : Druck [Pa]

Phasenübergänge

$$\Delta H_{sl} = m \cdot \Delta h_{sl}$$

(spezif.) Schmelzenthalpie

$$\Delta H_{lv} = m \cdot \Delta h_{lv}$$

(spezif.) Verdampfungsenth.

ΔH_{sl} : gesamte Enthalpieänderung beim Phasenwechsel fest $\leftrightarrow$ flüssig [J]

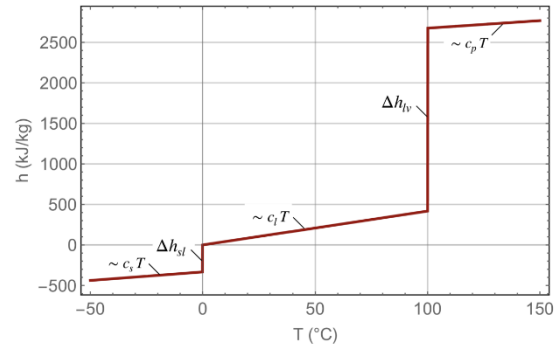
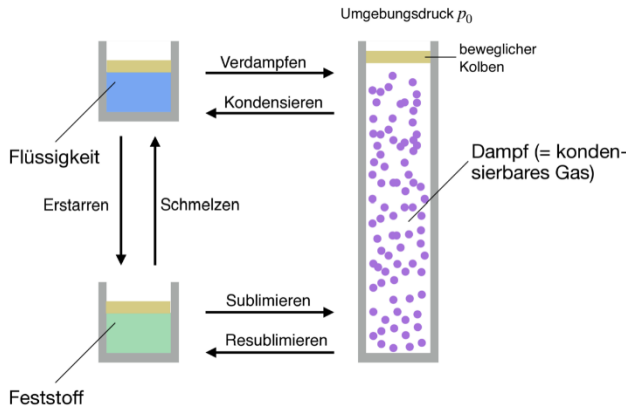
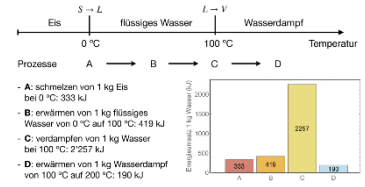
m : Masse des Stoffsystems [kg]

Δh_{sl} : spezifische Schmelz-/Erstarrungsenthalpie [J/kg]

ΔH_{lv} : tot. Enthalpieänderung beim Phasenwechsel flüssig $\leftrightarrow$ gas [J]

m : Masse des Stoffsystems [kg]

Δh_{lv} : spezifische Verdampfungs-/Kondens.-enthalpie [J/kg]



Spezifische Enthalpie von Wasser (1bar)

Ideale Gase

$$pV = nRT$$

Molarform

n : Stoffmenge [mol]

R : universelle Gaskonstante [J/(mol K)]

T : absolute Temperatur [K]

N : Teilchenzahl [-]

k : Boltzmann-Konstante [J/K]

pV : Druck·Volumen-Term [J]

$$pV = NkT$$

Teilchenform

$$pV = mR_S T$$

Massenform

R_S : spezif. Gaskonstante des Gases [J/(kg K)]

M : molare Masse des Gases [kg/mol]

$$p = \rho R_S T$$

Dichteform

p : Druck des Gases [Pa]

ρ : Dichte des Gases [kg/m³]

$$R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

universelle Gaskonstante

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K,}$$

Boltzmann-Konstante

$$R_S \equiv \frac{R}{M}$$

Spezifische Gaskonstante

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Stoffmenge

$N_A = 6.022 \times 10^{23}$

Avogadrozahl

Kalorische Zustandsgleichungen für ideale Gase

$$c_p = c_v + R_S$$

$\rho = \text{konstant}$

c_p : spezif. Wärmekapazität konst. Druck [J/(kg K)]

c_v : spezif. Wärmekapazität konst. Volumen [J/(kg K)]

R_S : spezif. Gaskonstante des Gases [J/(kg K)]

$$c_v = Z R_S$$

$V = \text{konstant}$

c_v : spezif. Wärmekapazität konst. Volumen [J/(kg K)]

Z : dimensionsloser Faktor (Proportionalitätsfaktor) [-]

$$Z = \frac{f}{2}$$

$$Z = \begin{cases} 3/2 & \text{1-atomiges Gas } (f = 3) \\ 5/2 & \text{2-atomiges Gas } (f = 5) \\ 6/2 & \text{mehr-atomiges Gas } (f = 6) \end{cases}$$

$$c_p = (Z + 1) R_S$$

$\rho = \text{konstant}$

Kinematik einatomiger Gase

$$p = \frac{1}{3} \rho c_A^2$$

Gasdruck

p : Druck des Gases [Pa]

ρ : Dichte des Gases [kg/m³]

c_A : Teilchengeschwindigkeit [m/s]

$$E_{\text{kin}} = m c_v T \stackrel{!}{=} U$$

E_{kin} : kinetische Energie (Gesamtenergie Teilchenbewegung) [J]

$$\frac{R}{M} T = \frac{1}{3} c_A^2$$

Zustandsänderungen idealer Gase

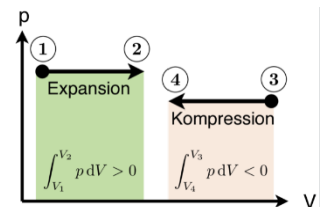
Isobar (konstanter Druck)

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

$V_{1,2}$: Volumen Zustand 1, 2 [m³]

$T_{1,2}$: absolute Temperatur Zustand 1, 2 [K]

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \frac{V}{T} = \text{const.}$$



Zustandsgrösse

$$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = -p(V_2 - V_1)$$

$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}}$: reversible mechanische (Volumen-) Arbeit 1 → 2 [J]

p : (konstanter) Druck während des Prozesses [Pa]

$(V_2 - V_1)$: Volumenänderung ΔV [m³]

$$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = -p \Delta V$$

Arbeit

$$W_{\text{th},12} = m c_p (T_2 - T_1)$$

$W_{\text{th},12}$: Wärmeübertrag ins System im Prozess 1 → 2 [J]

m : Masse des Stoffsystems [kg]

c_p : spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck [J/(kg K)]

$(T_2 - T_1)$: Temperaturänderung ΔT [K]

Wärmeenergie

Isotherm (konstante Temperatur)

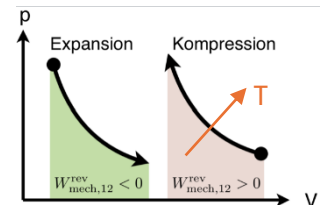
$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$p_{1,2}$: Druck Zustand 1, 2 [Pa]

$V_{1,2}$: Volumen Zustand 1, 2 [m³]

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$pV = \text{const.}$$



Zustandsgrösse

$$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = -m \frac{R}{M} T \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}}$: reversible mechanische (Volumen-)Arbeit 1 → 2 [J]

m : Masse des Gases [kg] **Arbeit negativ, Wärme positiv!**

R : universelle Gaskonstante [J/(mol K)]

M : molare Masse des Gases [kg/mol]

$\frac{R}{M}$: spezifische Gaskonstante R_s des Gases [J/(kg K)]

T : (isotherme) absolute Temperatur während des Prozesses [K]

$\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$: natürlicher Logarithmus des Volumenverhältnisses

Arbeit

$$W_{\text{th},12} = -W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = m \frac{R}{M} T \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Wärmeenergie

Isochor (konstantes Volumen)

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$$

$p_{1,2}$: Druck Zustand 1, 2 [Pa]

$T_{1,2}$: absoluter Temperatur Zustand 1, 2 [K]

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Zustandsgrösse

Da sich das Volumen nicht verändert, wird auch keine Arbeit geleistet: $W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = 0$

$$W_{\text{th},12} = m c_v (T_2 - T_1)$$

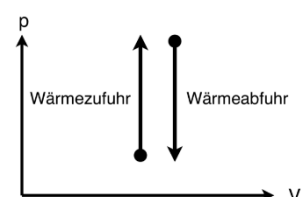
$W_{\text{th},12}$: Wärmeübertrag ins System im Prozess 1 → 2 [J]

m : Masse des Stoffsystems [kg]

c_v : spezif. Wärmekapazität (konstantes Volumen) [J/(kg K)]

$(T_2 - T_1)$: Temperaturänderung ΔT [K]

Wärmeenergie



Isentrop, adiabat reversibel (kein Wärme-/ Reibungsverlust an die Umwelt)

$$T_2 V_2^{(\kappa-1)} = T_1 V_1^{(\kappa-1)}$$

$T_{1,2}$: absoluter Temperatur Zustand 1, 2 [K]

$V_{1,2}$: Volumen Zustand 1, 2 [m³]

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{(\kappa-1)}$$

$$T V^{(\kappa-1)} = \text{const.}$$

Zustandsgrösse

κ : Isentropenexponent (Adiabatexponent), $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

$T V^{\kappa-1}$: isentrope Konst. entlang Prozess [K m^{3(κ-1)}]

$$p_2 V_2^\kappa = p_1 V_1^\kappa$$

$p_{1,2}$: Druck Zustand 1, 2 [Pa]

$p V^\kappa$: isentrope Konst. entlang Prozess [Pa m^{3κ}]

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa$$

$$p V^\kappa = \text{const.}$$

Zustandsgrösse

$T_{1,2}$: absoluter Temperatur Zustand 1, 2 [K]

$\frac{\kappa}{1-\kappa}$: Exponent in der Druck-Temperatur-Isentropenbeziehung

$p T^{\kappa/(1-\kappa)}$: isentrope Konst. entlang Prozess [Pa K^{κ/(1-κ)}]

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\kappa/(1-\kappa)}$$

$$p T^{\kappa/(1-\kappa)} = \text{const.}$$

Zustandsgrösse

$$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}} = U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1)$$

Arbeit

$W_{\text{mech},12}^{\text{rev}}$: reversible mechanische (Volumen-)Arbeit im Prozess 1 → 2 [J]

$(U_2 - U_1)$: Änderung der inneren Energie ΔU [J]

m : Masse des Gases [kg]

c_v : spezif. Wärmekapazität bei konst. Volumen [J/(kg K)]

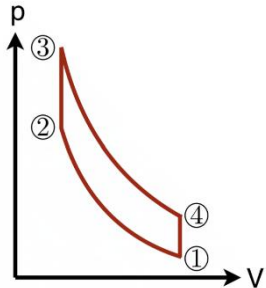
$(T_2 - T_1)$: Temperaturänderung ΔT [K]

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \approx \frac{Z+1}{Z}$$

κ : Isentropenexponent

Bei isentropen Prozessen wird per Definition keine Wärme umgesetzt: $W_{\text{th},12} = 0$

Kreisprozesse



Prozessschritt	Arbeit $W_{\text{mech},a \rightarrow b}^{\text{rev}}$	Wärme $W_{\text{th},a \rightarrow b}$
1 → 2: isentrop	$m c_v (T_2 - T_1) > 0$	0
2 → 3: isochor	0	$m c_v (T_3 - T_2) > 0$
3 → 4: isentrop	$m c_v (T_4 - T_3) < 0$	0
4 → 1: isochor	0	$m c_v (T_1 - T_4) < 0$

$$W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}} = -W_{\text{th},\odot}$$

$\Delta U_{\odot} = 0 \rightarrow$ Kreisprozess

$W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}$: reversible mechanische Nettoarbeit über den gesamten Kreisprozess [J]

$W_{\text{th},\odot}$: Netto-Wärmeübertrag über den gesamten Kreisprozess [J]

$\odot$: Kennzeichen „über den Zyklus / Kreisprozess“ (Anfangszustand = Endzustand)

$$W_{\text{th},\odot} = W_{\text{th},\oplus} + W_{\text{th},\ominus} = W_{\text{th},\oplus} - |W_{\text{th},\ominus}|$$

Netto Wärmeübertrag Kreisprozess

$W_{\text{th},\odot}$: Netto-Wärmeübertrag über den gesamten Kreisprozess [J]

$W_{\text{th},\oplus}$: zugeführte Wärme (positiver Wärmeanteil) [J]

$W_{\text{th},\ominus}$: abgeführte Wärme (negativer Wärmeanteil) [J]

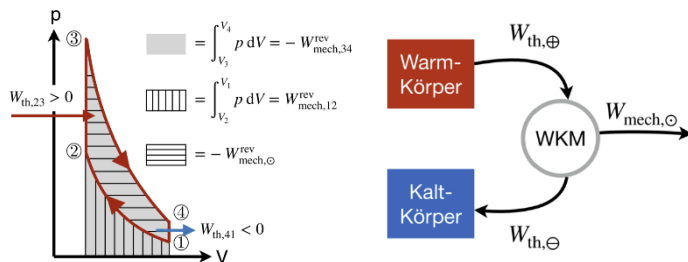
$|W_{\text{th},\ominus}|$: Betrag der abgeführten Wärme [J]

$$W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}} = -(W_{\text{th},\oplus} + W_{\text{th},\ominus}) = |W_{\text{th},\ominus}| - W_{\text{th},\oplus}$$

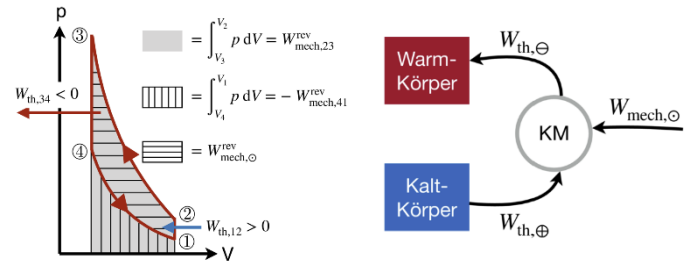
Rev. Mechanische Nettoarbeit

$W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}$: reversible mechanische Nettoarbeit gesamter Kreisprozess [J]

Charakterisierung Kreisprozesse



Rechtslaufender Kreisprozess (WKM)



Linkslaufender Kreisprozess (KM, WP)

$$\eta_{\text{WKM}} = \frac{|W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}|}{W_{\text{th},\oplus}} = \frac{|-W_{\text{th},\ominus}|}{W_{\text{th},\oplus}} = \frac{W_{\text{th},\oplus} - |W_{\text{th},\ominus}|}{W_{\text{th},\oplus}} = 1 - \frac{|W_{\text{th},\ominus}|}{W_{\text{th},\oplus}}$$

Thermischer Wirkungsgrad Wärmekraftmaschine -> immer < 1

$$\eta_{\text{KM}} = \frac{W_{\text{th},\oplus}}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}} = \frac{|W_{\text{th},\ominus}| - W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}} = \frac{|W_{\text{th},\ominus}|}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}} - 1$$

Thermischer Wirkungsgrad Kältemaschine -> kann auch > 1 sein

$$\eta_{\text{WP}} = \frac{|W_{\text{th},\ominus}|}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}} = \frac{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}} + W_{\text{th},\oplus}}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}} = 1 + \frac{W_{\text{th},\oplus}}{W_{\text{mech},\odot}^{\text{rev}}}$$

Thermischer Wirkungsgrad Wärmepumpe -> typischerweise > 1

$$1 - \frac{\text{Abwärme}}{\text{zugeführte Wärme}}$$

W_{th} : Wärmeübertrag

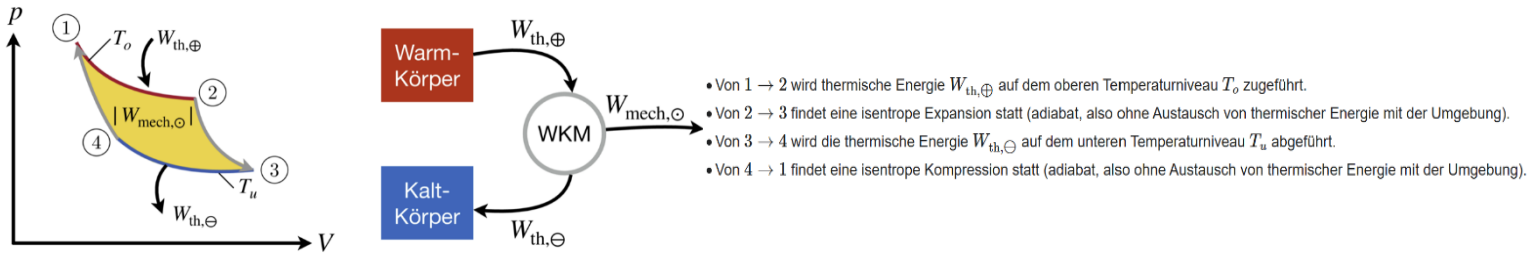
$W_{\text{mech}}^{\text{rev}}$: reversible mechanische Arbeit

„ $\odot$ “: bezogen auf gesamten Kreisprozess

„ $\oplus$ “: positiver Anteil -> Wärmezufuhr

„ $\ominus$ “: negativer Anteil -> Wärmeabfuhr

2. Hauptsatz der Thermodynamik - Entropie



Rechtslaufender Kreisprozess mit 2 isothermen und 2 isentropen Teilprozessen (**Carnot-Kreisprozess**)

$$\eta_{WKM,Carnot} = 1 - \frac{T_u}{T_o}$$

$\eta_{WKM,Carnot}$: Carnot-Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine [–]
 T_u : absolute Temperatur des unteren / kalten Reservoirs [K]
 T_o : absolute Temperatur des oberen / warmen Reservoirs [K]

Carnot-Wirkungsgrad (WKM)

$$I_S = \frac{I_{W,th}}{T}$$

Entropiestrom

I_S : Entropiestrom [W/K = J/(s K)]
 $I_{W,th}$: Wärmestrom / Wärmeleistung [W = J/s]
 T : absolute Temperatur, bei der der Wärmeübertrag stattfindet [K]
 $\frac{dS}{dt}$: zeitliche Änderungsrate der Entropie [W/K = J/(s K)]
 Π_S : Entropieproduktionsrate / Entropieerzeugung im System [W/K]

$$\frac{dS}{dt} = I_S = \frac{I_{W,th}}{T}$$

Entropiebilanz **rev. Prozess**

$$\frac{dS}{dt} = \frac{I_{W,th}}{T} + \Pi_S$$

Entropiebilanz **irrev. Prozess**

$$W_{th,12} = \int_{t_1}^{t_2} I_{W,th} dt = \int_{S_1}^{S_2} T dS$$

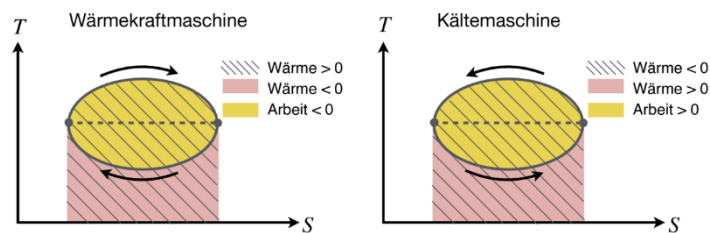
Ausgetauschte therm. Energie **rev. Prozess**

$W_{th,12}$: Wärmeübertrag im Prozess 1 → 2 [J]
 $I_{W,th}$: Wärmestrom / Wärmeleistung [W = J/s]
 t : Zeit [s]
 $\int_{S_1}^{S_2} T dS$: Wärmeübertrag als Integral über die Entropie [J]
 T : absolute Temperatur [K]
 $S_{1,2}$: Entropie 1 → 2 [J/K]

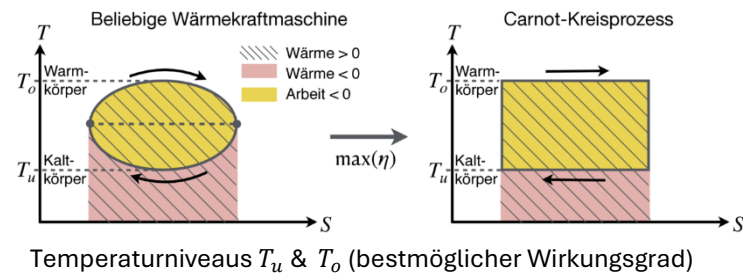
$$W_{mech,\odot}^{rev} = -W_{th,\odot} = \oint I_{W,th} dt = \oint T dS$$

Ausgetauschte Wärme & Arbeit bei **rev. Kreisprozess**

$W_{mech,\odot}^{rev}$: reversible mech. Nettoarbeit über ges. Kreisprozess [J]
 $W_{th,\odot}$: ges. Wärmeübertrag über den ges. Kreisprozess [J]
 $\oint I_{W,th}$: Integralwert Wärmestroms über vollständigen Zyklus [J]
 $I_{W,th}$: Wärmestrom / Wärmeleistung [W = J/s]
 S : Entropie [J/K]
 „ $\oint$ “: geschlossenes Integral über einen vollständigen Kreisprozess [–]



T, S-Diagramm Kreisprozess – gelbe Fläche = Nettoarbeit



$$\eta_{WKM,Carnot} = 1 - \frac{|W_{th,\ominus}|}{W_{th,\oplus}} = 1 - \frac{T_u}{T_o}$$

Wirkungsgrad Carnot - **WKM**

$\eta_{WKM,Carnot}$: Carnot-Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine [–]
 $|W_{th,\ominus}|$: Betrag der an das kalte Reservoir abgeführten Wärme [J]
 $W_{th,\oplus}$: zugeführte Wärme vom warmen Reservoir [J]
 T_u : absolute Temperatur des unteren / kalten Reservoirs [K]
 T_o : absolute Temperatur des oberen / warmen Reservoirs [K]

$$\eta_{KM,Carnot} = \frac{W_{th,\oplus}}{W_{mech,\odot}^{rev}} = \frac{T_u}{T_o - T_u}$$

Wirkungsgrad Carnot - **KM**

$W_{mech,\odot}^{rev}$: reversible mechanische Arbeit über den gesamten Kreisprozess [J]

$$\eta_{WP,Carnot} = \frac{|W_{th,\ominus}|}{W_{mech,\odot}^{rev}} = \frac{T_o}{T_o - T_u}$$

Wirkungsgrad Carnot - **WP**

$$\Delta S = S_2 - S_1 = m \left[c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{R}{M} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right]$$

Entropieänderung, ideales Gas mit V und T

$$\Delta S = S_2 - S_1 = m \left[c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right]$$

Entropieänderung, ideales Gas mit p und T

ΔS : Änderung der Entropie zwischen Zustand 1 und 2 [J/K]

$S_{1,2}$: Entropie im Zustand 1, 2 [J/K]

m : Masse des Gases [kg]

c_v : spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen [J/(kg K)]

$T_{1,2}$: absolute Temperatur im Zustand 2 [K]

$\frac{R}{M}$: spezifische Gaskonstante des Gases R_s [J/(kg K)]

R : universelle Gaskonstante [J/(mol K)]

M : molare Masse des Gases [kg/mol]

$V_{1,2}$: Volumen im Zustand 1, 2 [m³]

$p_{1,2}$: Druck Zustand 1, 2 [Pa]

$$\Delta T = \frac{p \Delta V}{m R_s}$$

ΔT in Abhängigkeit von ΔV & p

$$S_2 = S_1 + \frac{W_{th,12}}{T_1}$$

Entropie (Zust. 2) bei reversiblen Prozess & $T = \text{const.}$

Thermische Strahlungsflüsse

- Emission* bezeichnet das Aussenden bzw. Abgeben von thermischer Strahlung
- Absorption* bezeichnet das Aufnehmen von thermischer Strahlung
- Reflektion* bezeichnet das Spiegeln bzw. Rückstrahlen von thermischer Strahlung
- Transmission* bezeichnet das Durchlassen von thermischer Strahlung

$$I_{th,rad} = \sigma A T_s^4$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Stefan-Boltzmann-Konstante

$$I_{th,rad} = A \int_0^\infty j_{th,\lambda} d\lambda = \sigma A T_s^4$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

$I_{th,rad}$: thermischer Strahlungsstrom / abgestrahlte Wärmeleistung [W]

σ : Stefan-Boltzmann-Konstante [W/(m² K⁴)]

A : strahlende Oberfläche [m²]

T_s : absolute Oberflächentemperatur des strahlenden Körpers [K]

Stefan-Boltzmann-Ges. nur für schwarze Körper!

Schwarzer Körper:

Emittiert, absorbiert ganze einfallende Strahlung und Wellenlängen

Grauer Körper:

Emittiert/ absorbiert zu gleichen Teilen einfallende Strahlung

Weisser Körper:

Reflektiert gesamte einfallende Strahlung

Emittierter Strahlungsenergiestrom realer Körper

$$I_{th,rad} = \sigma \epsilon A T_s^4$$

ϵ : Emissionsgrad der Oberfläche [-]

Mod. Stefan-Boltzmann-Gesetz

Angepasstes Stefan-Boltzmann-Gesetz für alle Körper

$$\epsilon = \begin{cases} = 1 & \text{Schwarzer Körper} \\ < 1 & \text{Grauer Körper} \\ = 0 & \text{Weisser Körper} \end{cases}$$

Austausch von Wärmestrahlung zwischen Oberflächen

$$I_{th,rad} = \frac{\sigma A}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (T_{s_1}^4 - T_{s_2}^4)$$

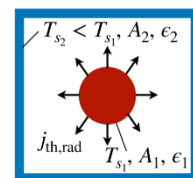
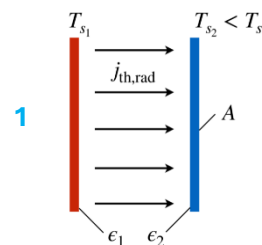
1) Netto-Wärmestrahlungsfluss zwischen zwei nahen Platten

$$I_{th,rad} = \sigma A (T_{s_1}^4 - T_{s_2}^4)$$

Netto-Wärmestrahlungsfluss zwischen zwei nahen Platten für **schwarze Körper** ($\epsilon_{1,2} = 1$)

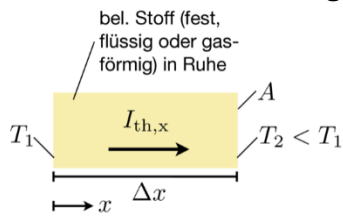
$$I_{th,rad} = \sigma \epsilon_1 A_1 (T_{s_1}^4 - T_{s_2}^4)$$

2) Netto-Wärmestrahlungsstrom gegen grossen Raum



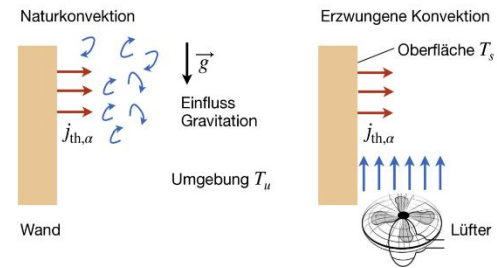
$$I_{th,rad} = \frac{\epsilon \sigma A}{2 - \epsilon} (T_{s_1}^4 - T_{s_2}^4) \rightarrow \text{für } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$$

Fourier'sche Wärmeleitung - Konduktion



Konduktion (Wärmeleitung durch Stoff)

$I_{th,x}$: Wärmestrom in x-Richtung [W]
 T_1 : Temperatur an der linken Seite [K]
 T_2 : Temperatur an der rechten Seite [K]
 ΔT : Temperaturdifferenz über die Strecke Δx [K]
 A : Fläche senkr. zur Wärmestromrichtung [m²]
 Δx : Länge bzw. Dicke des Stoffbereichs [m]
 κ : Wärmeleitfähigkeit des Stoffes [W/(m K)]



$$I_{th,x} = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz

$$j_{th,x} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

$j_{th,x}$: Wärmestromdichte in x-Richtung [W/m²]

Grenzfall: $\Delta \rightarrow 0$ und $j_{th,x} = I_{th,x}/A$

Wärmeflüsse über umströmte Oberflächen- Konvektion

$$j_{th,\alpha} = \alpha (T_s - T_u)$$

Wärmeübergangskoeffizient um Objekt

$j_{th,\alpha}$: Wärmestromdichte durch Konvektion [W/m²]

α : Wärmeübergangskoeffizient

T_s : Oberflächentemperatur [K]

T_u : Umgebungstemperatur des Fluids [K]

A : wärmeübertragende Oberfläche [m²]

$I_{th,\alpha}$: Wärmestrom durch Konvektion [W]

$$I_{th,\alpha} = A \alpha (T_s - T_u)$$

Abs. Wärmestrom Konvektion

Wärmedurchgang in thermischen Reihenschaltungen

$$I_{th,x} = A U (T_i - T_a)$$

Wärmestrom durch Struktur

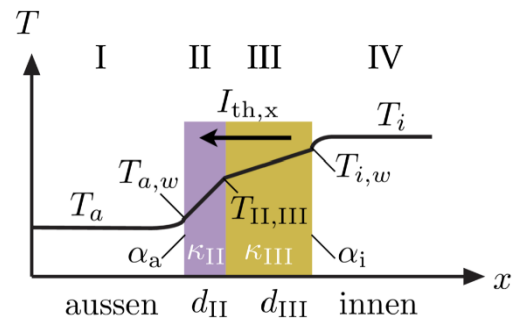
$I_{th,x}$: Wärmestrom in x-Richtung / durch Bauteil [W]

A : wärmeübertragende Fläche [m²]

U : Wärmedurchgangskoeffizient [W/(m² K)]

T_i : Temperatur auf inneren Seite [K]

T_a : Temperatur auf äusseren Seite [K]



$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_{II}}{\kappa_{II}} + \frac{d_{III}}{\kappa_{III}} + \frac{1}{\alpha_i}}$$

Wärmedurchgangskoeffizient

U : Wärmedurchgangskoeffizient gesamte Struktur [W/(m² K)]

α_a : äusserer Wärmeübergangskoeffizient [W/(m² K)]

α_i : innerer Wärmeübergangskoeffizient [W/(m² K)]

κ_{II} : Wärmeleitfähigkeit der Schicht II [W/(m K)]

κ_{III} : Wärmeleitfähigkeit der Schicht III [W/(m K)]

d_{II} : Dicke der Schicht II [m]

d_{III} : Dicke der Schicht III [m]

$$R_{th} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_{II}}{\kappa_{II}} + \frac{d_{III}}{\kappa_{III}} + \frac{1}{\alpha_i} \right)$$

Thermischer Widerstand

R_{th} : gesamter Wärmewiderstand des Bauteils [K/W]

$$I_{th,x} = (T_i - T_a)/R_{th}$$

Wärmestrom durch Struktur

$$\frac{d\bar{T}_K}{dt} = -\frac{1}{C_K} \left(\frac{(\bar{T}_K - \bar{T}_T)}{R_{KT}} + \frac{(\bar{T}_K - T_u)}{R_{KO}} \right)$$

Änderung Mitteltemperatur in abh. von Δt

$\frac{d\bar{T}_K}{dt}$: zeitliche Änderungsrate der mittleren Temperatur des Körpers K [K/s]

$\bar{T}_K$: mittlere Temperatur des Körpers K [K]

C_K : Wärmekapazität des Körpers K [J/K]

$\bar{T}_T$: mittlere Temperatur des zweiten Körpers / Teilsystems T [K]

T_u : Umgebungstemperatur [K]

R_{KT} : Wärmewiderstand zwischen Körper K und System T [K/W]

R_{KO} : Wärmewiderstand zwischen Körper K und der Umgebung [K/W]

$$\frac{d\bar{T}_T}{dt} = \frac{1}{C_T} \left(\frac{(\bar{T}_K - \bar{T}_T)}{R_{KT}} - \frac{(\bar{T}_T - T_u)}{R_{TU}} - \frac{(\bar{T}_T - T_u)}{R_{TP}} \right)$$

Änderung Mitteltemperatur in abh. von Δt

$\frac{d\bar{T}_T}{dt}$: zeitl. Änderungsrate mittl. Temperatur Körper T [K/s]

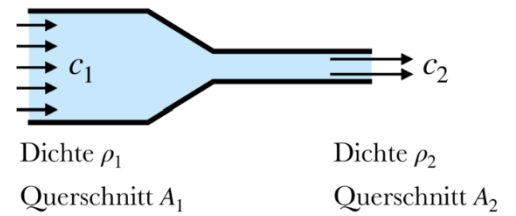
C_T : Wärmekapazität des Körpers T [J/K]

R_{TU} : Wärmewiderstand zwischen T und der Umgebung U [K/W]

R_{TP} : Wärmewiderstand zwischen T und einem weiteren Pfad/System P zur Umgebung [K/W]

1. Hauptsatz für offene, stationäre Systeme

$\rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2$
 Kontinuität Massestrom
 ρ : Dichte im Querschnitt 1,2 [kg/m³]
 c : **Strömungsgeschwindigkeit** Querschnitt 1,2 [m/s]
 A : Querschnittsfläche Querschnitt 1,1 [m²]



$$\Delta I_{W_{th}} + \Delta I_{W_p} + \Delta I_{W_{kin}} + \Delta I_{W_{pot}} = I_{th,12} + I_{mech,12}$$

Energiebilanz für ein durchströmtes System

$\Delta I_{W_{th}}$: Änderung des thermischen Energiestroms [W]
 ΔI_{W_p} : Änderung des Druckenergiestroms [W]
 $\Delta I_{W_{kin}}$: Änderung des kinetischen Energiestroms [W]
 $\Delta I_{W_{pot}}$: Änderung des potenziellen Energiestroms [W]
 $I_{th,12}$: Wärmeleistungsstrom / therm Leistungsübertrag 1 → 2 [W]
 $I_{mech,12}$: mechanischer Leistungsübertrag im Prozess 1 → 2 [W]

$$I_m \left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] = I_{th,12} + I_{mech,12}$$

Energiebilanz eines offenen, durchströmten Systems

I_m : Massenstrom [kg/s]
 $h_{1,2}$: spezifische Enthalpie im Zustand 1,2 [J/kg]
 $(h_2 - h_1)$: Änderung der spezifischen Enthalpie [J/kg]
 $c_{1,2}$: **Strömungsgeschwindigkeit** im Zustand 1,2 [m/s]
 $\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2)$: Änderung der spezifischen kinetischen Energie [J/kg]
 g : Erdbeschleunigung [m/s²]
 $z_{1,2}$: geodätische Höhe im Zustand 1,2 [m]
 $w_{th,12}$: spezifische Wärmeübertragung im Prozess 1 → 2 [J/kg]
 $w_{mech,12}$: spezifische mechanische Arbeit im Prozess 1 → 2 [J/kg]

$$(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) = w_{th,12} + w_{mech,12}$$

Massespezifische Form (Energiebilanz / I_m)

$$I_m \left[c_L (T_2 - T_1) + \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] = I_{th,12} + I_{mech,12}$$

1. HS offener, stationärer Systeme für **Flüssigkeiten**

c_L : spezifische Wärmekapazität Flüssigkeit [J/(kg K)]
 $T_{1,2}$: Temperatur im Zustand 1,2 [K]
 c_p : spezifische Wärmekapazität konst. Druck [J/(kg K)]

$$I_m \left[c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) \right] = I_{th,12} + I_{mech,12}$$

1. HS offener, stationärer Systeme für **Gase**

$$I_{mech,12}^{rev} = I_m c_p T_1 \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right]$$

Für isentrope Expansions- oder Kompressionsprozesse

Thermodynamische Charakterisierung von Flugzeugturbinen

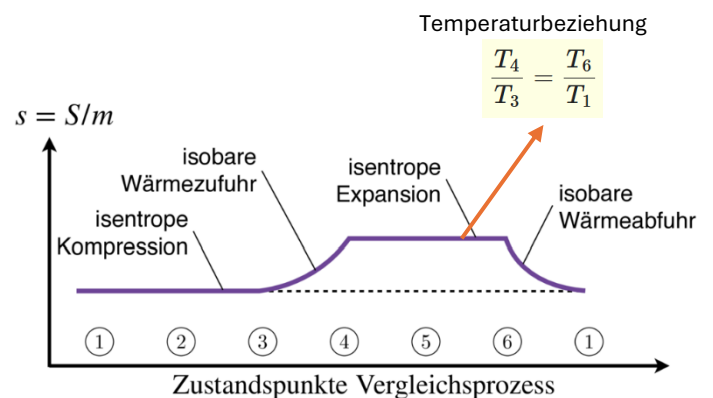
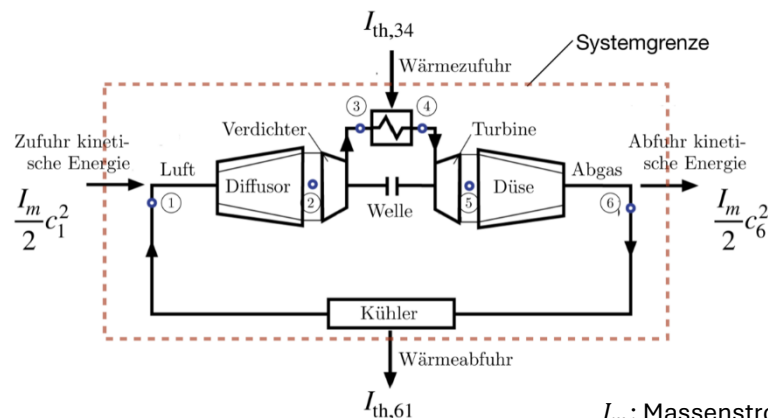
$$F_S = I_{m,aus} c_{aus} - I_{m,ein} c_{ein} \approx I_m (c_{aus} - c_{ein})$$

Schubkraft Triebwerk

F_S : Strömungskraft / Schubkraft auf das System [N]
 P_{mech} : mechanische Leistung [W]
 $c_{ein,aus}$: **Strömungsgeschwindigkeit** am Eintritt [m/s]
 $I_{m,ein,aus}$: Massenstrom [kg/s]

$$P_{mech} = c_{ein} F_S = I_m c_{ein} (c_{aus} - c_{ein})$$

Leistung Triebwerk



$$\frac{I_m}{2} (c_6^2 - c_1^2) = I_{th,34} - |I_{th,61}| \gg 0$$

Gesamtenergiebilanz Turbojet

I_m : Massenstrom [kg/s]
 c_x : **Strömungsgeschwindigkeit** im Zustand 1 [m/s]
 $I_{th,34}$: zugeführte Wärmeleistung im Prozess 3 → 4 [W]
 $|I_{th,61}|$: Betrag der abgeführten Wärmeleistung im Prozess 6 → 1 [W]
 $I_{th,34} - |I_{th,61}|$: netto Wärmeleistung, -> Übertrag in kinetische Energie [W]

$$\eta_i = 1 - \frac{|I_{th,61}|}{I_{th,34}} = 1 - \frac{T_6 - T_1}{T_4 - T_3}$$

Innenwirkungsgrad Turbojet

$$\eta_a = \frac{I_m c_1 (c_6 - c_1)}{I_m (c_6^2 - c_1^2)/2} = \frac{2 c_1}{c_6 + c_1}$$

Aussenwirkungsgrad TJ

η_i : Innenwirkungsgrad [-]

$I_{th,61}$: abgeführte Wärmeleistung im Prozess 6 → 1 [W]

$|I_{th,61}|$: Betrag der abgeführten Wärmeleistung [W]

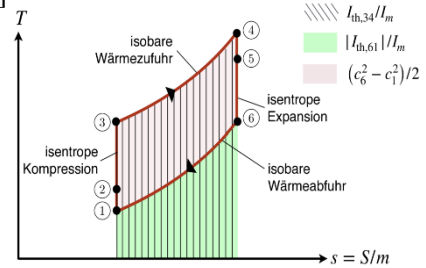
$I_{th,34}$: zugeführte Wärmeleistung im Prozess 3 → 4 [W]

T_x : Temperatur im Zustand x [K]

$$\eta_{th} = \frac{I_m c_1 (c_6 - c_1)}{I_{th,34}}$$

Thermischer Wirkungsgrad TJ

$$\Rightarrow \eta_{th} = \eta_i \eta_a$$



Elektrisches Feld

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

Coulomb

C : ein Coulomb, Einheit der elektrischen Ladung [C]

A : ein Ampere, Einheit der elektrischen Stromstärke [A]

s : Sekunde, Einheit der Zeit [s]

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Ampère (Stromstärke)

$$\dot{Q} = \sum I_{Q,zu} + \sum I_{Q,ab}$$

Landungsbilanz System

$\dot{Q}$: zeitliche Änderung der elektrischen Ladung [C/s = A]

$\sum I_{Q,zu}$: Summe aller zufließenden elektrischen Ströme [A]

$\sum I_{Q,ab}$: Summe aller abfließenden elektrischen Ströme [A]

$$\vec{F}_{C,12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Coulombkraft zw. Punktladungen

$\vec{F}_{C,12}$: elektrische Coulomb-Kraft auf Ladung 2 durch Ladung 1 [N] -> analog Gravitation

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$: Coulomb-Konstante [N m²/C²]

q_1 : elektrische Ladung erste Punktladung [C]

q_2 : elektrische Ladung zweite Punktladung [C]

r_{12} : Abstand zw. den beiden Ladungen [m]

$\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$: Einheitsvektor Ladung 1 nach Ladung 2 [-]

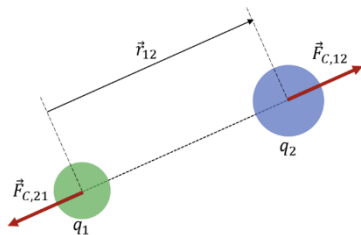
ϵ_0 : el. Feldkonstante [C²/(N m²)]

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9 \frac{\text{V m}}{\text{A s}}$$

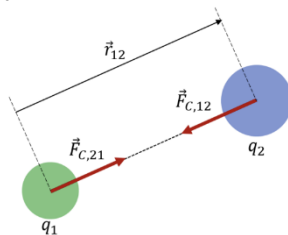
Coulomb-Konstante

$$\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}$$

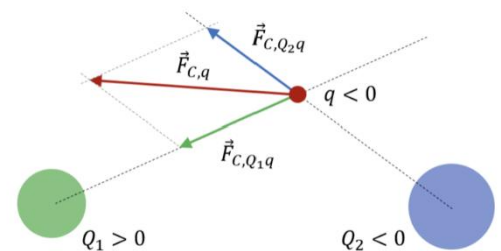
Elektrische Feldkonstante



Ladungen beide positiv oder beide negativ



Eine Ladung positiv, die andere negativ



Superposition der Coulomb-Kräfte (Q_1, Q_2)

Coulomb-Kraft zw. zwei **gleichn.** Ladungen (l) und zwei **ungleichnamigen** Ladungen (r) (Analog zur Gravitationskraft)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

El. Feld einer Punktladung Q

$\vec{E}(\vec{r})$: elektrisches Feld am Ort $\vec{r}$ [N/C]

Q: elektrische Punktladung, die das Feld erzeugt [C]

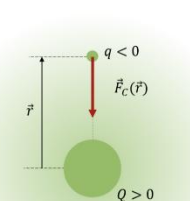
$\vec{F}_C(\vec{r})$: el. Coulomb-Kraft auf Ladung am Ort $\vec{r}$ [N]

q: elektrische Ladung der Probeladung [C]

$\vec{r}$: Ortsvektor des betrachteten Punktes [m]

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

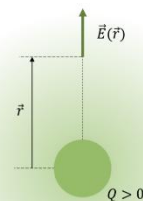
Coulomb-Kraft auf Probeladung in el. Feld -> analog $m \cdot \vec{g}$



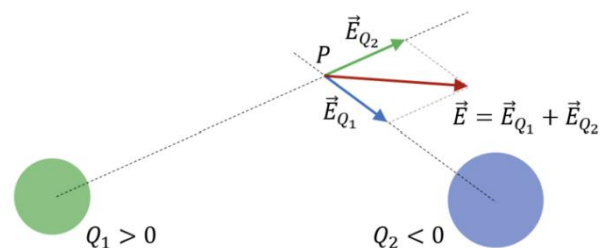
$$\vec{F}_C(\vec{r}) = q \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

(L) Coulomb-Kraft auf eine Probeladung im el. Feld der Ladung.

(R) Elektrischer Feldvektor der Ladung am Ort der Probeladung.



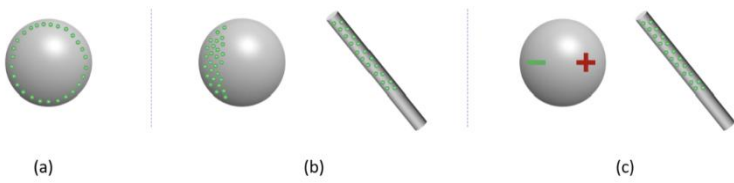
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Überlagerung der elektrischen Felder von den zwei Ladungen Q_1 und Q_2 im Punkt P.

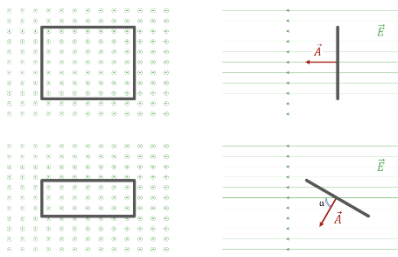
Überlagerung der elektrischen Felder von den zwei Ladungen Q_1 und Q_2 im Punkt P.

Influenz/ Polarisierung



Eine ungeladene Metallkugel mit einer anfangs homogenen Oberflächenladung (a) wird durch Annäheren eines geladenen (nicht-leitenden) Stabs beeinflusst (b). Dadurch entstehen unterschiedliche Ladungsdichten auf der Kugel (c). Die Seite nahe am Stab wird positiv geladen (Elektronenmangel), die dem Stab abgewandte Seite wird negativ geladen (Elektronenüberschuss). Bei sich zwei berührenden Objekten verteilen sich die positive und negative Seite auf die beiden Kugeln.

Elektrischer Feldfluss



el. Fluss durch Fläche

$$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

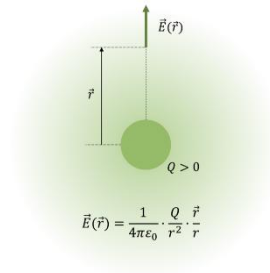
ϕ : el. Fluss durch die Fläche A [N m²/C]

$\int_A$: Flächenintegral über gesamte Fläche A

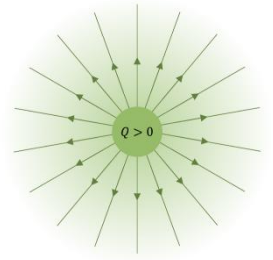
$\vec{E}$: elektrische Feldstärke [N/C]

A: betrachtete Fläche [m²]

→ Skalarprodukt (Analog: $A \cdot \cos \angle(\vec{E}, \vec{A})$)



L: Feldvektor an Ort x



R: el. Feld (Feldlinien)

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Elektrostatik – Gauss

$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$: gesamter elektrischer Fluss durch die geschlossene Fläche A [N m²/C]

Q: von der geschlossenen Fläche eingeschlossene elektrische Ladung [C]

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante / Permittivität des Vakuums [C²/(N m²)]

Potential – Analogie Gravitationspotential

$$\Delta E_{\text{pot,G}} = m \cdot \Delta \varphi_G$$

Potentialdifferenz Grav.-energie

$$\varphi_G(P) = - \int_{-\infty}^P \vec{g}(\vec{r}) d\vec{s}$$

Gravitationspotential bei P

$\Delta E_{\text{pot,G}}$: Änderung der pot. Energie Gravitationsfeld [J]

m: Masse des Körpers [kg]

$\Delta \varphi_G$: Änderung des Gravitationspotentials [J/kg]

G: Gravitationskonstante [N m²/kg²]

M: Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt [kg]

r: Abstand vom Mittelpunkt der Masse M [m]

$$\varphi_G(r) = -G \frac{M}{r}$$

Gravitationspotential

$$\Delta \varphi_G = \varphi_G(P_2) - \varphi_G(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{g}(\vec{r}) d\vec{s}$$

Gravitationspotentialdiff. zwischen P₁ und P₂

Elektrisches Potential und Potentialdifferenz

$$\Delta E_{\text{pot,E}}(\Delta r) = q \cdot \Delta \varphi_E$$

Potentialdifferenz el. Energie

$$\Delta E_{\text{pot,E}}(\Delta r) = q \cdot U$$

$$\varphi_E(P) = - \int_{-\infty}^P \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s}$$

El. Potential bei P in el. Feld $\vec{E}$

$\Delta E_{\text{pot,E}}$: Änderung der elektrischen potenziellen Energie [J]

q: elektrische Ladung [C]

$\Delta \varphi_E$: Änderung des elektrischen Potentials [V = J/C]

U: elektrische Spannung bzw. Potentialdifferenz [V]

$\vec{E}(\vec{r})$: elektrische Feldstärke am Ort $\vec{r}$ [N/C = V/m]

P: betrachteter Punkt im Feld

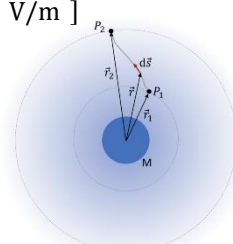
$\int_{-\infty}^P$: Integral vom Bezugspunkt ∞ bis Punkt P

$$\varphi_E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

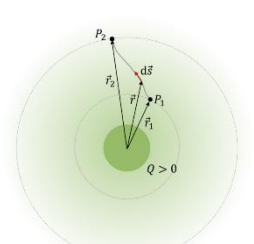
el. Potential einer Punktladung

$$\Delta \varphi_E = \varphi_E(P_2) - \varphi_E(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s}$$

El. Potentialdiff. (Spannung, U) zwischen P₁ und P₂ in Feld $\vec{E}$



Probemasse in Gravitationsfeld P₁ → P₂ (L)



Probemasse in elektrischem Feld P₁ → P₂ (R)

Spannung, Strom & Leistung

$$P_G = \Delta \varphi_G \cdot I_m$$

Prozessleistung Grav.

P_G : gravitative Leistung [W]

$\Delta \varphi_G$: Änderung Gravitationspotentials [J/kg]

I_m : Massenstrom [kg/s]

P_E : elektrische Leistung [W]

$\Delta \varphi_E$: Änderung des el. Potentials / Spannung [V = J/C]

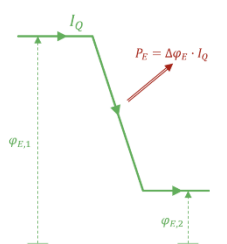
I_Q : elektrischer Strom / Ladungsstrom [A = C/s]

$$P_E = \Delta \varphi_E \cdot I_Q = U \cdot I$$

Prozessleistung elektrischer Prozess

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{W}}{\text{A}}$$

Volt (Spannung, U) = Watt / Ampere



Elektrischer Widerstand

$$R(t) := \frac{U(t)}{I(t)}$$

Def. el. Widerstand

$R(t)$: elektrischer Widerstand zum Zeitpunkt t [Ω]

$U(t)$: elektrische Spannung zum Zeitpunkt t [V]

$I(t)$: elektrische Stromstärke zum Zeitpunkt t [A]

$$U(t) = R(t) \cdot I(t)$$

$$I(t) \propto U(t) \Rightarrow \frac{U(t)}{I(t)} = R(t) = \text{const.}$$

Ohm'scher Leiter / Ohm'sches Gesetz

$$1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Definition Ohm

A : Ampere, Einheit der elektrischen Stromstärke [A]

P : elektrische Leistung [W]

U_R : elektrische Spannung am Widerstand [V]

$$P = U_R \cdot I$$

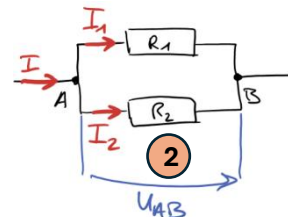
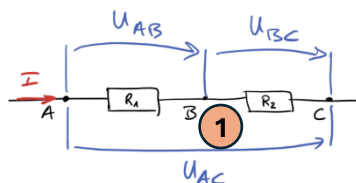
el. Leistung am Widerstand

$$R = R_1 + R_2$$

1) Ohm'scher Widerstand Serien-/Reihenschaltung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

2) Ohm'scher Widerstand Parallelschaltung



Hydraulischer Widerstand

$$I_V = \frac{\Delta p}{R_V}$$

Volumenstrom laminar

I_V : Volumenstrom [m³/s]

Δp : Druckdifferenz [Pa]

R_V : Strömungswiderstand / hyd. Widerstand [Pa s/m³]

k : Proportionalitätskonstante / Strömungskennwert [Pa s²/m⁶]

$I_{V,krit}$: kritischer Volumenstrom [m³/s]

Δp_{krit} : kritische Druckdifferenz [Pa]

$$I_V = \sqrt{\frac{\Delta p}{k}}$$

Volumenstrom turbulente Strömung

$$I_{V,krit} = \frac{R_V}{k}$$

Kritischer Volumenstrom (Übergang laminar -> turbulent)

$$\Delta p_{krit} = \frac{R_V^2}{k}$$

Kritischer Druck

$$R_V = R_{V1} + R_{V2}$$

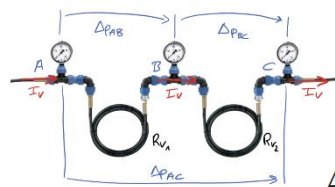
Hydraulische Serienschaltung

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_{V1}} + \frac{1}{R_{V2}}$$

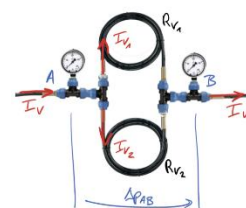
Hydraulische Parallelschaltung

$R_{V1,2}$: Strömungswiderstand 1, 2 [Pa s/m³]

Δp_{ABC} : Druckdifferenz an Punkt A, B und C [Pa]



$$\Delta p_{AC} = \Delta p_{AB} + \Delta p_{BC}$$



$$I_V = I_{V1} + I_{V2}$$

Elektrische Kapazität

$$C(t) = \frac{Q(t)}{U(t)}$$

Kapazität Kondensator

$C(t)$: elektrische Kapazität zum Zeitpunkt t [F]

$Q(t)$: gespeicherte elektrische Ladung zum Zeitpunkt t [C]

$U(t)$: elektrische Spannung zum Zeitpunkt t [V]

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

Def. Farad (el. Kapazität)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Kapazität serien-/reihengeschalteten Kondensatoren

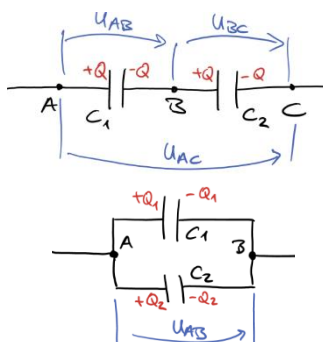
$C_{1,2}$: Einzelkapazität 1 & 2 [F]

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Parallelgeschaltete Kondensatoren



$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

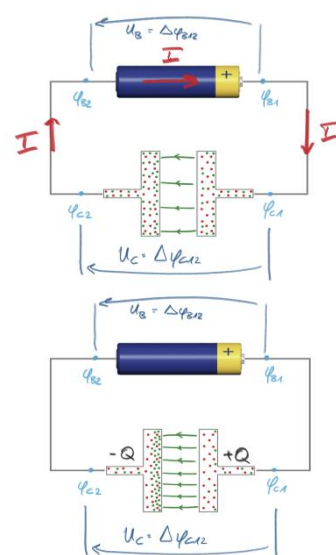
Gesp. Energie im Kondensator

W_C : im Kondensator gespeicherte Energie [J]

C : Kapazität des Kondensators [F]

U : Spannung am Kondensator [V]

Ladung eines Kondensators



Elektrische Kapazität - Lade-, Entlade- & Ausgleichsprozesse

$$U_C(t) = U \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

U Kondensator Ladevorgang

$$\tau = RC$$

Zeitkonstante serielle RC-Schaltung

$$Q_C(t) = Q_{C,F} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Ladung Kondensator während Ladevorg.

$$U_C(t) = U \cdot e^{-t/\tau}$$

U Kondensator Entladung

$$Q_C(t) = Q \cdot e^{-t/\tau}$$

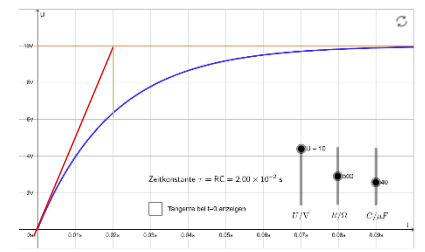
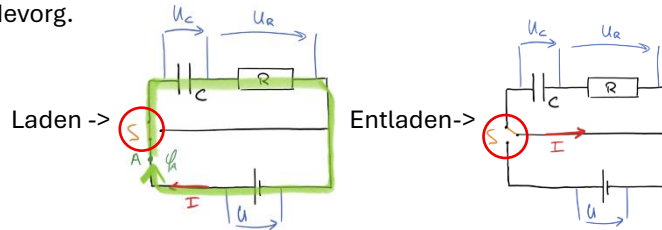
U Kondensator während Entladung

$$\varphi_{\text{Ausgleich}} = \frac{Q_{1,I} + Q_{2,I}}{C_1 + C_2}$$

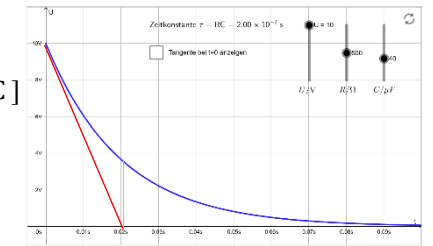
Ausgleichspotential Kondensatoren

$U_C(t)$: Spannung am Kondensator zum Zeitpunkt t [V]
 U : angelegte Endspannung / Versorgungsspannung [V]
 e : Eulersche Zahl, 2,718 [-]
 t : Zeit seit Beginn des Ladevorgangs [s]
 τ : Zeitkonstante des RC-Kreises [s]
 R : elektrischer Widerstand [Ω]
 C : elektrische Kapazität des Kondensators [F]

$Q_C(t)$: Ladung Kondensator zum Zeitpunkt t [C]
 $Q_{C,F}$: Kondensatorladung / Endladung nach Laden [C]



U Kondensator während Ladevorg.



U Kondensator während Entladung

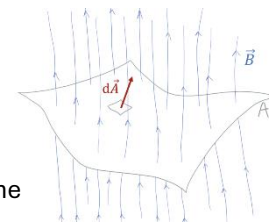
$\varphi_{\text{Ausgleich}}$: Ausgleichspotential nach Ladungsausgleich [V]
 $Q_{1,2,I}$: Anfangsladung Kondensator 1, 2 [C]
 $C_{1,2}$: Kapazität des ersten Kondensators [F]

Magnetfeld

$$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Magnet. Feldfluss

ϕ_B : magnetischer Fluss durch die Fläche A [Wb]
 $\vec{B}$: magnetische Flussdichte / Magnetfeld [T]
 A : betrachtete Fläche [m²]
 $\cdot$: Skalarprodukt; Feldkomponente senkrecht zur Fläche



$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Betrachtung ganze Fläche
 Magnetfeldlinien sind geschlossen:
 heben sich gegenseitig auf -> 0

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Gesetz von Biot-Savart

$d\vec{B}(\vec{r})$: infinitesimaler Beitrag magn. Flussdichte bei $\vec{r}$ [T] (senkrecht zu $d\vec{\ell}$ und $\hat{r}$)
 μ_0 : magn. Feldkonstante (Vakuum) [N/A²]
 $\frac{\mu_0}{4\pi}$: Proportionalitätskonstante Biot-Savart-Gesetz [N/A²]
 I : elektrische Stromstärke im Leiter [A]
 $d\vec{\ell}$: infinitesimales Leiterstück in Stromrichtung [m]
 $\hat{r}$: Einheitsvektor Leiterstück zum betrachteten Punkt [-]

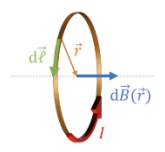
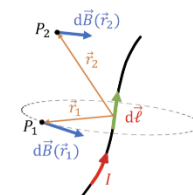
$$\mu_0 = 1.256\,637 \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Magnetische Feldkonstante

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Magnetfeld Leiterschleife

B : magnetische Flussdichte Zentrum Leiterschleife [T]
 N : Anzahl Windungen der Spule [-]
 ℓ : Länge der Spule [m]



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

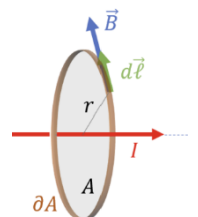
Magnetfeld langer gerader Leiter

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

Magnetfeld im Inneren langer Spule

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$: Umlaufintegral magn. Flussdichte entlang geschl. Randes ∂A [T m]
 I : von der Fläche A eingeschlossener el. Strom [A]



Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Magnetische Kraft auf
 Geladenes Teilchen

$\vec{F}_B$: magnetische Kraft auf bewegte Ladung [N]
 q : elektrische Ladung des Teilchens [C]
 $\vec{v}$: Geschwindigkeit der Ladung [m/s]
 $\vec{B}$: magnetische Flussdichte / Magnetfeld [T]
 $\vec{E}$: elektrische Feldstärke [N/C = V/m]

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzkraft auf geladenes Teilchen

(el. Feld wirkt nur auf ruhende Ladungen)
 (magn. Feld wirkt nur auf bewegte Ladungen)

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B})$$

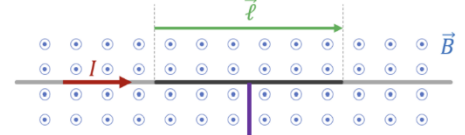
Magn. Kraft gerader Leiter

$\vec{F}$: magn. Kraft auf stromdurchflossenen geraden Leiter [N]

I : elektrische Stromstärke durch den Leiter [A]

$\vec{\ell}$: Leiterlängenvektor in Stromrichtung [m]

$\vec{B}$: magnetische Flussdichte / Magnetfeld [T]



Kraft auf Leiterstück (Magnetfeld aus Bildebene heraus)

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$$

Magnetisches Moment

$\vec{\mu}$: magnetisches Moment stromdurchfl. Leiterschleife [A m²]

I : elektrische Stromstärke durch die Leiterschleife [A]

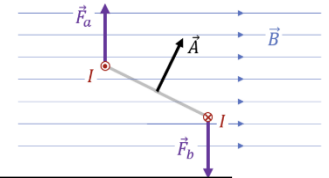
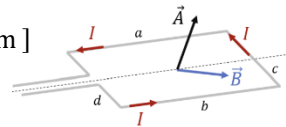
$\vec{A}$: orientierter Flächenvektor der Leiterschleife [m²]

$$[B] = \frac{[F]}{[I] \cdot [\ell]} = \frac{N}{A \cdot m} = T \quad \text{Einheit Tesla}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Magnetisches Drehmoment

$\vec{M}$: Drehmoment auf den magnetischen Dipol [N m]



Elektrische Induktion

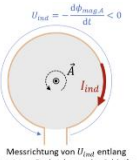
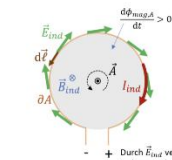
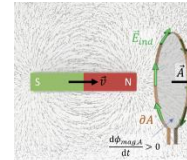
$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt}$$

Gesetz von Faraday

U_{ind} : induzierte elektrische Spannung [V]

ϕ_{mag} : magnetischer Fluss durch die Leiterschleife [Wb]

$\frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt}$: zeitliche Änderungsrate magn. Fluss [Wb/s = V]



$$\oint_{\partial A} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Induziertes el. Feld durch $\Delta \phi_B$

$\oint_{\partial A} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell}$: Umlaufintegral induziertern el. Feldes entlang geschlossenen Rand ∂A [V]

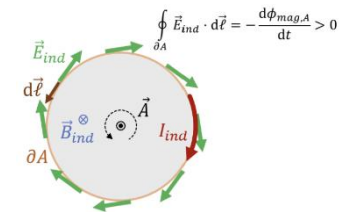
$\vec{E}_{\text{ind}}$: induziertes elektrisches Feld [V/m = N/C]

$d\vec{\ell}$: infinitesimales Wegelement entlang der geschlossenen Kurve [m]

∂A : Rand der Fläche A , also die geschlossene Integrationskurve [-]

$\frac{d}{dt}$: zeitliche Ableitung [1/s]

$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$: magn. Fluss durch Fläche A [Wb] $\rightarrow = \phi_B$, gem S. 12



$$L = \mu_0 \cdot \left(\frac{N}{\ell} \right)^2 \cdot A \ell$$

Induktivität lange Zylinderspule

L : Induktivität der Spule [H]

μ_0 : magnetische Feldkonstante [H/m = N/A²]

N : Anzahl Windungen der Spule [-]

ℓ : Länge der Spule [m]

A : Querschnittsfläche der Spule [m²]

E_L : in der Spule gespeicherte magn. Energie [J]

$$U_L = L \dot{I} \quad \text{Selbstinduktionsspannung}$$

U_L : induzierte Spannung an der Spule [V]

L : Induktivität der Spule [H]

$\dot{I}$: zeitliche Änderung der Stromstärke $\frac{dI}{dt}$ [A/s]

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V}}{\text{A/s}}$$

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2$$

Induktiv gespeicherte Energie

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

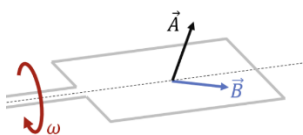
Energiedichte Magnetfeld

w_{mag} : magnetische Energiedichte [J/m³]

B : magnetische Flussdichte / Magnetfeld [T]

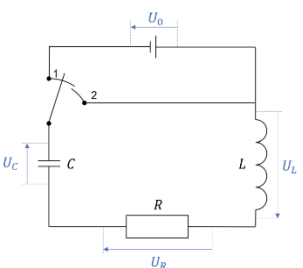
$$\mu_0 = 1.256 \, 637 \, \dots \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \approx 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Anwendungsbeispiele

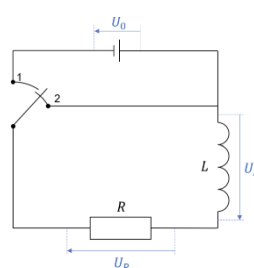


Funktionsweise Generator -> Magnetischer Feldfluss ϕ_B über Zeit

→ Es entsteht eine induzierte Spannung: U_{ind}



RLC-Schaltkreis



RL-Schaltkreis

$$U_R + U_L - U_0 = 0$$

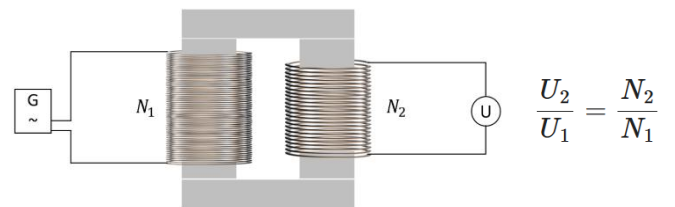
$$\tau = \frac{L}{R}$$

RL-Zeitkonstante

τ : Zeitkonstante des RL-Kreises [s]

L : Induktivität der Spule [H]

R : elektrischer Widerstand im Stromkreis [Ω]



Transformator -> Verhältnis Spannung zu Windungen

ω_0 : Eigenkreisfrequenz LC-Schwingkreis [rad/s]

L : Induktivität der Spule [H]

C : Kapazität des Kondensators [F]

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Eigenfrequenz LC-Kreis