1 Grundlagen

1.1 Fehlertypen

1.) **Modellfehler**: Ein mathematisches Modell beschreibt eine Beobachtung oder Situation nur annähernd. Es entstehen Differenzen zwischen dem wahren Wert und dem modellierten Wert aufgrund der getroffenen Annahmen und Vereinfachungen.
Beispiel: Oft wird in physikalischen Berechnungen Reibung vernachlässigt, was die Berechnungen vereinfacht.

2.) **Datenfehler**: Beim Erheben von Daten für das Modell werden Messungen verwendet, welche Messfehlern unterliegen. Mit diesen werden z.B. Modellparameter kalibriert, was je nach Datenqualität zu verzerrten Modellaussagen führt.
Beispiel: Wenn Sie Längen mit einem gewöhnlichen Massstab messen, sind Angaben in nm unmöglich.

3.) **Verfahrensfehler**: Numerische Verfahren können häufig selbst bei exakter Rechnung nur eine Näherungslösung finden. Wenn sie rekursiv Näherungen bestimmen, kommen Sie z.B. beliebig nah an das wahre Ergebnis, meist aber nie exakt.
Beispiel: In der numerischen Integration ersetzt man eine beliebige Funktion durch ein Polynom.

4.) **Rundungsfehler**: Computer können nicht alle Zahlen darstellen, daher muss zwangsläufig gerundet werden. Computer haben nur endlich viele Bits zur Darstellung jeder einzelnen Zahl und dies beschränkt beispielsweise die Anzahlnachkommastellen.
Beispiel: Wenn ein Computer nur mit dreistelligen Zahlen arbeiten kann, dann muss er π auch 3.14 runden.

Numerik

Fehler

absoluter Fehler:

$$|\Delta x| = |\tilde{x} - x|$$

Abweichung: Gibt Bereiche an in der der Fehler liegt z.B in [m]

relativer Fehler:

$$\delta_x = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

Gibt eine Grössenordnung des Fehlers
+ (Qualität der Schätzung)
− (Irreführend bei: Vektoren...)

$\tilde{x}$ = Geschätzter Wert (anzustrebender Wert)
x = Effektiver Wert

Vektornormen

P-Norm:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

12) a) $\vec{x} = (-1, 4, 0.4, -3)$ → $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0.4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\|x\|_1$ = max absolute Spaltensumme
$= |-1| + |-4| + |0.4| + |-3|$
$= 8.4$

$\|x\|_2 = \sqrt{|-1|^2 + |-4|^2 + |0.4|^2 + |-3|^2}$
$= \sqrt{1 + 16 + 0.16 + 9}$
$= 5.11$

$\|x\|_\infty$ = grösster Eintrag (in Betrag betrachtet!)
$= 4$

1.2 Normen

∞-Norm, maximale absolute Zeilensumme

$$\|B\|_\infty = \max \sum_{i=1}^{n} |b_{i,k}|$$

(**Achtung** Betrag des Eintrags der Matrix zur berechnung nehmen)
Bsp.:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \|B\|_\infty = \max\{1+2, 3+4, 5+6\} = 11$

Zeilenebene

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_\infty = \max\{v_1, v_2, v_3\}$$

1-Norm, maximale absolute Spaltensumme

$$\|B\|_1 = \max \sum_{i=1}^{m} |b_{i,k}|$$

$\|B\|_1 = \max\{1+3+5, 2+4+6\} = 12$

spaltenebene

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3|$$

2-Norm, Spektralnorm

numpy.linalg.norm(A, ord=2)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

Maximaler Eigenwert

Eigenwert: $\lambda_{max}(A^T A)$:

$\det(A^T A - \lambda I) = 0$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^T * A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 2$

$$\|A\|_2 = \sqrt{2}$$

Bei Vektoren:

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2}$$

det von 2x2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$

det 3x3

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\det(A) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Eine Norm erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. **Positivität:** $\|x\| > 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
2. **Homogenität:** $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für jede (reelle bzw. komplexe) Zahl α.
3. **Dreiecksungleichung:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

1. Fehler muss grösser 0 sein
2. Doppelt so grosse Abweichung ⇒ Doppelt so grosser Fehler
3. Fehler kummulieren und können in entgegengesetzte Richtung laufen

1.3 Differenzial-Rechnungen

Numerisch Differenzieren

Gegeben: Punkte x_i mit $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
Funktionswerte $f(x_i)$
Konstanter Abstand zwischen Punkten: $h = x_i - x_{i-1}$

1. Ableitung

Vorwärtsdifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h)$

Rückwärtsdifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h)$

Zentraldifferenz

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h^2)$

Einseitige Differenzenformel 3. Ordnung

$$f'(x_i) \approx D_f(x_i, h) = \frac{2f(x_i + h) + 3f(x_i) - 6f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{6h}$$

2. Ableitung – Numerische Differenzen

2. Ableitung

Vorwärtsdifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h)$

Rückwärtsdifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h)$

Zentraldifferenz

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2}$$ Fehlerordnung: $\mathcal{O}(h^2)$

Man berechnet eine Ableitung also nicht exakt mit Ableitungsregeln, sondern nähert die Ableitung mit Funktionswerten an.

Rechnen mit Beträgen

$$|x - 1.3| \leq 0.05x$$

$$-0.05x \leq x - 1.3 \leq 0.05x$$

als einzelne Ungleichung betrachten und nach x auflösen

$$1.2381 \leq x \leq 1.3684$$

1.4 O-Notation

Definition 1.6. Das **Landausche $\mathcal{O}$-Symbol** ist wie folgt definiert:
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in \mathbb{R}$. Man sagt, f ist „gross Oh" von g für x gegen a

$$f(x) = \mathcal{O}(g) \quad \text{für } x \to a$$

wenn in einer Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

für eine Konstante $C > 0$.

Wichtig ist die Grössenordnung des Fehlers

$\mathcal{O}(h)$ = Fehler halbierung = wenn h halbiert wird

$\mathcal{O}(h^2)$ = Fehler viertelung = wenn h halbiert wird

$\mathcal{O}(h^3)$ = Fehler achtelung = wenn h halbiert wird

Die tiefste Ordnung des Fehlers wird benötigt rest fällt weg, da es kleiner ist

$\mathcal{O}(h^2) + \underbrace{\mathcal{O}(h^4)}_{\text{Fällt weg}} \Rightarrow \mathcal{O}(h^2)$

absolute Fehler

$$|^1D_f(x_0, h) - f'(x_0)|$$

$|^1D_f(x_0, h) - f'(x_0)| = \mathcal{O}(h^k)$ Grössenordnung k

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Zeilen durch Iterieren

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spalten Fixieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spaltenweise Füllen

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$
$2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$
$0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$
$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$
$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$
$2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$
$0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

$$A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = 256$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{256} = 16$$

1.5 Taylorentwicklung

Mit Taylor-Reihen können Funktionen als Polynome um einen Entwicklungspunkt x_0 dargestellt werden.

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$t_f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{0!}$$

$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Durch mehrfaches Ableiten und Einsetzen des Entwicklungspunkts, werden die Koeffizienten a_k des Polynoms ermittelt. Wenn die Taylor-Reihe gegen Unendlich strebt, strebt auch der Fehler zwischen der nachzubildenden Funktion gegen Null.

1. Ableitungen von f(x)
2. Punkt in f(x) einsetzen z.B. f(2)
3. Taylor-Polynom aufstellen mit oberer Struktur

WICHTIGSTE BEKANNTE TAYLORREIHEN

Funktionen $e^x, \sin(x), \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$t_{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$t_{sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$t_{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$t_{ln}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k, \; x_0 = 1$$

1. Funktion erkennen
2. Funktion ableiten
   - ↳ wie oft muss ich ableiten?
   - ↳ Grad des Taylorpolynoms = Ordnung des Restterms − 1
   - ↳ Grad Taylorpolynom = Anzahl Ableitungen
3. Auswertungspunkt x_0 erkennen
   - ↳ Siehe gewünschtes Ergebnis $(x-1)^2 + O(|x-1|^3)$ (x_0, x_0)
   - ↳ $x_0 = 1$
4. Taylorpolynom aufstellen
5. Restterm o ergänzen
   - ↳ O-Notation mit einem Grad höher als das Taylorpolynom

Ist nur der Restterm also O-Notation gesucht, dann muss man solange ableiten bis der erste Term $\neq 0$ ist
Grad Taylorpolynom = Grad bei O-Notation

$$\tan(x) - x = O(x^3)$$

$$\tan(x) - x = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{0} \cdot x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2}}_{0} \cdot x^2 + O(x^3)$$

$f'''(0) \neq 0$!

der Faktor vor dem Term wird zu O !!!

Siehe Nächste Seite

$$f(x_k + s) = f(x_k) + sf'(x_k) + \frac{s^2}{2}f''(x_k) + \frac{s^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{s^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(s^5)$$

Fall $f(x_k + h)$

$s = h$

$$f(x_k + h) = f(x_k) + hf'(x_k) + \frac{h^2}{2}f''(x_k) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

Fall $f(x_k - h)$

$s = -h$

$$f(x_k - h) = f(x_k) + \overbrace{(-h)}^{-}f'(x_k) + \overbrace{\frac{(-h)^2}{2}}^{+}f''(x_k) + \overbrace{\frac{(-h)^3}{6}}^{-}f^{(3)}(x_k) + \overbrace{\frac{(-h)^4}{24}}^{+}f^{(4)}(x_k) + \overbrace{O(h^5)}^{+}$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2}f''(x_k) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

Fall $f(x_k - 2h)$

$s = -2h$

$$f(x_k - 2h) = f(x_k) + \overbrace{(-2h)}^{-}f'(x_k) + \overbrace{\frac{(-2h)^2}{2}}^{+}f''(x_k) + \overbrace{\frac{(-2h)^3}{6}}^{-}f^{(3)}(x_k) + \overbrace{\frac{(-2h)^4}{24}}^{+}f^{(4)}(x_k) + \overbrace{O(h^5)}^{+}$$

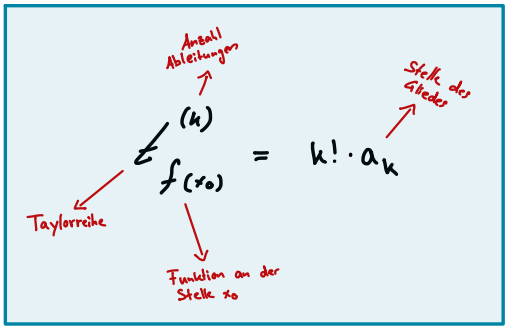
$$f(x_k - 2h) = f(x_k) - 2hf'(x_k) + \frac{4h^2}{2}f''(x_k) - \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x_k) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

Taylorreihe

input Funktion, output Polynom } Annäherung einer Funktion durch ein Polynom

1. Ableitungen berechnen
   ↳ p_3 = 3 mal Ableiten
2. Auswertungsbereich = x_0 in Ableitung einsetzen
3. Taylorpolynom zusammensetzen Formel anwenden
4. Vereinfachen

$$T_{f(x)} = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3$$



$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$0! = 1$

$1! = 1$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\sum a_k (x-x_0)^k$$

Tangentengleichung / polynom Grad 1

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Trick bei e^z

der Exponent kann einfach in die Taylorreihe eingefügt werden

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$t_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Trick bei $\cos(z)$

der Exponent kann einfach in die Taylorreihe eingefügt werden

$$\cos(z) = +\frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

+1

Exponenten gerader Grad

Vorzeichen alternierend

Taylor Entwicklung um x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$$

Taylor Entwicklung um $x_0 + h$

Wobei h die Schrittweite ist
also wird einfach ausgewertet um h verschoben

$x = x_0 + h$

1. Wie gewohnt Taylorpolynom aufstellen:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$$

2. x durch x_0+h ersetzen

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(\underbrace{(x_0+h)-x_0}_{h}) + \frac{f''(x_0)}{2}(\underbrace{(x_0+h)-x_0}_{h})^2 + O((\underbrace{(x_0+h)-x_0}_{h})^3)$$

3. Vereinfachen

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + O(h^3)$$

Taylor Entwicklung um $x_0 + 2h$

2. $$f(x_0+2h) = f(x_0) + f'(x_0)(\underbrace{(x_0+2h)-x_0}_{2h}) + \frac{f''(x_0)}{2}(\underbrace{(x_0+2h)-x_0}_{2h})^2 + O((\underbrace{(x_0+2h)-x_0}_{2h})^3)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,2h + \frac{f''(x_0)}{2}(2h)^2 + O(|8h^3|)$$

(2) kürzen

8 fällt weg da dies ist sagen wie kleine Einflüsse auf den Fehler hat

$$= f(x_0) + f'(x_0)2h + f''(x_0)2h^2 + O(|h^3|)$$

1.6

Kondition

Outputfehler ≈ Konditionszahl × Inputfehler

Konditionszahl

um welchen Faktor wird der relative Fehler verstärkt?

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x_0)}{f(x_0)}\right| \approx \kappa_{rel}(x_0) * \left|\frac{(\tilde{x} - x_0)}{x_0}\right|$$

δy = output δx = input off x_0

mit

$$\kappa_{rel}(x_0) = \left|f'(x_0) * \frac{x_0}{f(x_0)}\right|$$

Die Zahl

$$\kappa_{rel}(x_0)$$

heisst **relative Konditionszahl** des Problems f an der stelle x_0 und beschreibt die maximale Verstärkung des relativen Eingabefehlers. Entsprechend bezeichnet man mit

$$\kappa_{abs}(x_0) = |f'(x_0)|$$

die **absolute Konditionsszahl** des Problems f.

Kondition

Mit der relativen / absoluten Kondition eines durch f beschriebenene Problems bezeichnet man das Verhältnis:

$$\kappa_{rel} = \frac{\delta_y}{\delta_x} \qquad \kappa_{abs} = \frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$$

Verstärkung

Ist ein Mass für die Sensitivität unter Störung der Eingabedaten.

Kondition = Eigenschaften des Problems (gut konditioniert = relative Kondition klein!)
Fehler im Input führ zu Abweichung im Output, selbst bei exakter Berechnung
Kondition sagt aus, wie stark Datenfehler das exakte Ergebnis verändert
Müssen wir akzeptieren!

Stabilität = Eigenschaften der Algorithmus
Wie stark durch die numerische Lösung durch Rechen- und Rundungsfehler verfälscht wird.
Ist in unserer Macht!

Algorithmus = Sequenz von Rechenschritten

Δx = Eingabefehler = $\tilde{x} - x$

Δy = Ausgabefehler = $f(\tilde{x}) - f(x)$

$$\kappa_{abs} \approx \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|\tilde{x} - x|}$$

Fragestellung: relative Fehler höchstens 10%

$\delta_y \leq 0{,}1$

δ_y = siehe oben (Kondition)

1.7 Zahlendarstellung

Gleitpunktarithmetik

Bei der Berechnung in z.B. "3-Stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik" wir mit 3 signifikanten Stellen gerechnet. Ergebnisse werden auf 3 signifikante Stellen gerundet.

Zahlendarstellung

Darstellung von dezimalen Zahlen als n-stellige Gleitpunktzahlen:

$$x = m * 10^e$$

m: Mantisse
e: Exponent (Stellenverschiebung)
n: Anzahl der signifikanten Dezimalstellen in der Mantisse

1. normierte Gleitpunktdarstellung (wissenschaftliche Schreibweise) *
2. Zählen der Signifikanten Ziffern ($= n$)

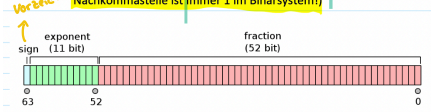
* Punkt nach links verschieben = Exponent erhöhen
  rechts verschieben = Exponenten verringern

$13{,}75 = 1 \cdot 10^1 + 3{,}75$
$= 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0{,}75$
$= 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 0{,}05$
$= 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

$2^3 + 5{,}75$
$2^3 + 2^2 + 1{,}75$
$2^3 + 2^2 + 2^0 + 0{,}75$
$2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 0{,}25$
$= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
$1101.11_2 = 0{,}110111 \cdot 2^4$

$0{,}110111$ auf 2 signifikante abschneiden nach 2 Stellen
$0{,}11|0111 \cdot 2^4 = 0{,}11 \cdot 2^4$
$0{,}11 \cdot 2^4 = 0{,}110000 \cdot 2^4$
$= 1100{,}0000 \cdot 2^0$
$2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$
$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} \ldots$

In Computer:
- Basis ist 2 (Bits können 0 oder 1 sein)
- Zahlen vom Datentyp double nutzen 64 bits:
  - 1 Bit für Vorzeichen (0 = -, 1 = +)
  - 11 Bits für den Exponenten e, davon eines für das Vorzeichen des Exponenten
    $\Rightarrow -1023 \leq e \leq 1024$
  - 52 Bits für die signifikanten Stellen/Mantisse, also 53 Stellen nach Komma (erste Nachkommastelle ist immer 1 im Binärsystem!)



$G = 1.10_2$, Normalisiert = 1.10_2 da es immer mit 1 beginnt wird diese implizit angenommen!

Definition 1.10. Die Zahl

$$\text{eps} := b^{1-m}$$

wird relative **Maschinengenauigkeit** genannt. Dieses Zahl charakterisiert das *Auflösungsvermögen* des Rechners. Es gilt, dass eps gerade die kleinst mögliche auf dem Rechner darstellbare Zahl ist, die zu 1 addiert von der Rundung noch wahrgenommen wird.

Der maximale, relative Rundungsfehler heisst auch **Rundungseinheit** u_M. In der n-stelligen Gleitpunktarithmetik zur Basis b gilt:

$$u_M = \frac{1}{2} \cdot b^{1-m} = \frac{\text{eps}}{2}.$$

b = Basis
m = Anzahl signifikanter Stellen der Mantisse

Beispiel 1: double im Computer

Gegeben:

Basis b = 2
Mantissenlänge m = 53

$$\varepsilon = 2^{1-53}$$
$$\varepsilon = 2^{-52}$$
$$2^{-52} \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$$

Gilt nicht!

Das *Assoziativgesetz*
$x + (y + z) \stackrel{?}{=} (x + y) + z$

Die Reihenfolge spielt eine Rolle!

$1 + (-1 + 0.001) = 1 + (-1) = 0$
$(1 + (-1)) + 0.001 = 0 + 0.001 = 0.001$

Gilt nicht!

Das *Distributivgesetz*
$x(y + z) \stackrel{?}{=} xy + xz$

$x = 9.857 \cdot 10^{-3}$
$y = 9.743 \cdot 10^{2}$
$z = -9.742 \cdot 10^{2}$

$y + z = 0.1$, $x(y + z) = 9.857 \cdot 10^{-4}$
$xy = 9.604$, $xz = -9.603$, $xy + xz = 0.001$

Auslöschung

Bemerkung 1.6. Die Addition und Subtraktion ist im Gegensatz zur Multiplikation und Division problematisch, da die relativen Fehler enorm verstärkt werden können. Diesen Effekt nennt man **Auslöschung**.

$11.258762 - 11.244891 = 0.013871$

5 Ziffern: $11.258762 = 11.26$
5 Ziffern: $11.244891 = 11.24$
$11.26 - 11.24 = 0.02$
$\left|\frac{0.013871 - 0.02}{0.013871}\right| \approx 44.2\%$

Optimum bei Fehler finden

1. Formel für die Fehler ermitteln
   ↳ $\frac{1}{n}$ = Verfahrensfehler
2. Fehler gleichsetzen
3. nach "n" auflösen

Gesamtfehler $\approx \underbrace{n\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{Rundung}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Verfahren}}$

$$n\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}$$
$$n^* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon/2}}$$

2 Lineare Gleichungen

Essenzielle Python-Befehle für lineare Gleichungssysteme (Cheat Sheet):

- Determinante von A:
  numpy.linalg.det(A)
- Matrixprodukt von A und B oder A und Vektor x:
  A @ B und A @ x / numpy.matmul(A, B) und numpy.matmul(A, x)
- Lösen von LGS $A\vec{x} = b$:
  numpy.linalg.solve(A, b)
- Relative Kondition der Matrix A bzgl. der p_ord-Normen:
  numpy.linalg.cond(A, p = p_ord)

Eingabedaten = $A, \vec{b}$
Ausgabedaten = $\vec{x}$

$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

↳ nur Quadratisch! (nxn)

Ziel ist es für den Ergebnisvektor "$\vec{b}$" den Lösungsvektor "$\vec{x}$" zu ermitteln

$\vec{x}$ kann genau (1, 0, ∞) Lösungen haben

$\text{rang}(A) = n$ = Zeilen & Spalten sind linear unabhängig

A = Koeffizientenmatrix, $\vec{x}$ = Lösungsvektor, $\vec{b}$ = Ergebnisvektor

Homogene Systeme

$Ax = 0$, $x = 0$

Kondition

wie stark ändert sich die Ausgabe, wenn sich die Eingabe ändert?

Eine sehr kleine Änderung der Matrix A, führt zu riesigen Änderungen des Vektors $\vec{x}$

$\begin{pmatrix} 3.3 & 1.2 \\ 6.9 & 2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.7 \end{pmatrix} \quad x \approx \begin{pmatrix} 16.3 \\ -44 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3.31 & 1.2 \\ 6.9 & 2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.7 \end{pmatrix} \quad \vec{x} \approx \begin{pmatrix} 98.0 \\ -269.4 \end{pmatrix}$

A ist gut konditioniert wenn x sich kaum ändert — Schlecht konditioniert wenn x sich stark ändert.

Konditionszahl

(wie stark Fehler verstärkt werden)

$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

$\Delta x = \tilde{x} - x$

Satz 2.3. *Sei $\vec{x} + \Delta\vec{x}$ die Lösung von $A \cdot (\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$. Dann gilt*

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\text{Kondi}} \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

δ_x = relative Fehler Lösung — relative Fehler Eingabe = Eingabefehler, Datenfehler, Rundungsfehler → δ_b

Konditionszahl	Bedeutung
κ(A) ≈ 1	sehr gut konditioniert
κ(A) klein	stabil
κ(A) sehr groß	schlecht konditioniert

$\Delta x, x, \Delta b, b$ sind alles vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Wichtig

Die Normen sind oben nicht spezifiziert, es ist aber zentral, dass immer mit der selben Norm gerechnet wird! Beispiel ∞-Norm

$\delta_x \leq k(A) \cdot \delta_b \leftarrow \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

Residuum

wie gut erfüllt $\tilde{x}$ die Gleichung "$Ax = b$"?

$\tilde{r} = b - A \cdot \tilde{x}$

- x ist die exakte Lösung
- $\tilde{x}$ ist eine approximierte Lösung

$A\tilde{x} = b \quad r = 0$

Das wäre eine Perfekte Lösung

Zusammenhang Fehler und Residuum

$\kappa(A)^{-1} \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$

Relative Fehler Lösung

$\kappa(A)^{-1} = \frac{1}{\kappa(A)}$

$\kappa(A)^{-1} = \frac{1}{100} = 0.01$

Rückwärtseinsetzen ↓ Obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Vorwärtseinsetzen ↓ Untere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Diese Dreiecksysteme haben eine Lösung wenn ALLE Diagonalelemente $\neq 0$ sind!

Determinante det(A)

$\det(A) \neq 0$ → eindeutige Lösung

$\det(A) = 0$ → keine oder unendlich viele Lösungen

2x2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$

Dreiecksmatrix

$\begin{pmatrix} r_{11} & * & * \\ 0 & r_{22} & * \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \quad \det(A) = r_{11} r_{22} r_{33}$

3x3 (Sarrus)

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$

4x4 (Laplace)

Entwicklung der Determinanten nach einer Zeile oder Spalte

am besten eine mit möglichst vielen Nullen!

1. Zeile (oder Spalte) auswählen
2. Vorzeichen bestimmen
3. Gestrichene Zeile (oder Spalte) mit Vorzeichen übernehmen
4. Spalte (oder Zeile) Streichen
   ↳ daraus neue kleinere Matrizen erstellen

Vorzeichen-Gitter

$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ Zeile Streichen, Vorzeichen eintragen

$\det = -3 \cdot \det(1) + 0 \cdot \det(2) - 4 \cdot \det(3) + 0 \cdot \det(4)$

$\det(1) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(4) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Inverse (A^{-1})

($\det(A) \neq 0$) Anderenfalls existiert keine Inverse!

Allgemein (Gauss-Jordan)

$[A \mid I]$

Man hängt die Einheitsmatrix an, dann führt man Zeilenumformung durch, solange bis man rechts die Einheitsmatrix "I" stehen hat

$AA^{-1} = I$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

2x2

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3 LR-Zerlegung $(L \cdot R = A)$

Es gilt, falls die Matrix A invertierbar ist!

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad CA\vec{x} = C\vec{b}. \qquad \boxed{L \cdot R\vec{x} = \vec{b}}$$

Permutationmatrix

damit werden Zeilen & Spalten ausgetauscht.

$$1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$\det P = (-1)^{\text{Anzahl Zeilen- und Spaltenvertauschungen}}$

↑ Exponent (Anzahl 1-en)

det Alterniert zwischen -1 & 1 { ungerader Exponent / gerader Exponent }

Multiplikation mit der Einheitsmatrix ergibt keine Änderung!

Von rechts Multiplizert = Spalten werden getauscht
Von links Multiplizert = Zeilen werden getauscht

Nur Unterhalb der Diagonale
Nur Eine Spalte!
Es kann immer nur eine oben von der unteren Abgezogen werden

z.B Eintrag $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ I, II, III, IV

Matrix A wird nun mit dieser Matrix Multipliziert

dann wird die $-1 \cdot z_1$ von $z_2 = z_2 - 1 \cdot z_1$ abgezogen ⇓ l_{21}

nicht vergessen auch mit $\vec{b}$ multiplizieren

Matrix P,L,R zur Speicherung

$\boxed{A = L \cdot R}$

P = Alle Zeilenvertauschungen festhalten
L = Alle Einträge der Gauss-Elimination mit gegenteiligem Vorzeichen
R = Resultierende Matrix nach Gauss-Elimination

Achtung: Wenn in der Matrix A Zeilen oder Spalten getauscht werden, dann muss dies auch in L dementsprechend angepasst werden aber nur die Elemente !!! l_{ij}

$$L = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ l_{21}&1&0\\ l_{31}&l_{32}&1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11}&r_{12}&r_{13}\\ 0&r_{22}&r_{23}\\ 0&0&r_{33} \end{pmatrix}$$

$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$ $\boxed{P \cdot A = P \cdot \vec{b}}$

Mit dieser Formel kann jedes LGS mit der selben Matrix A und unterschiedlichem $\vec{b}$ Vektor gelöst werden.

Lösen mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen

Zusammenhänge

Grund-Ansatz: $Ax = b$
Idee: $A = L \cdot R$
daraus folgt: $LRx = b$

Das System gleich mit A zu lösen ist möglich aber meist sehr aufwändig. Daher werden einfachere Matrizen R & L genommen und führen zum selben Lösungsvektor $\vec{x}$

Die Gleichung wird aufgeteilt sodass nur R oder L vorkommt → mit P-Matrix multiplizieren!

$Ly = b$

Gesucht wird der Zwischen-Lösungs-Vektor "$\vec{y}$" welcher dann in die nächste Gleichung eingesetzt wird

$Rx = y$

daraus folgt der Lösungs-Vektor "$\vec{x}$"

Pivotisierung

Vertauschen der Zeilen, damit beim Rechnen keine ungünstigen kleinen Zahlen als Pivot verwendet werden.
Der Pivot ist die Zahl, mit der man beim Eliminieren teilt.
Durch Pivotisierung wird die Gauss-Elimination Stabiler

Skalieren

verbessert die Konditionszahl der Matrix

(Zeilen-Norm)

- Zeilennorm bestimmen und als Element der Diagonalmatrix festhalten und mit A multiplizieren

$A = \begin{pmatrix} 1&5&0\\ 2&2&2\\ -2&0&2 \end{pmatrix}$ Normen $= \begin{matrix} 6\\ 2\\ 4 \end{matrix}$ $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}&0&0\\ 0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $D \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}&\frac{5}{6}&0\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ → skaliert!

(Lösungsvektor $\vec{b}$ mit D̄ skalieren!!!)

- So erhalten wir als Norm immer 1!
- Spaltennorm Skalieren => Erhalten wir nicht mehr dasselbe LGS!

relevant für das Rechnen im Computer

Determinante

$$\det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$$

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(R)}{\det(P)}$$

$\det(A)$ wird schnell sehr aufwändig

det von L, R & P sehr einfach:
$\det(L)$ = Diagonale multiplizieren
$\det(R)$ = Diagonale multiplizieren
$\det(P) = (-1)^{\text{Anzahl Vertauschungen}}$ ⇒ { Ungerade = -1 / Gerade = 1

Inverse

$A \cdot A^{-1} = A = I$ → $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} \cdot e_1 = Ax_1 = e_1\\ A \cdot A^{-1} \cdot e_2 = Ax_1 = e_2\\ A \cdot A^{-1} \cdot e_3 = Ax_1 = e_3 \end{pmatrix}$$

Inverse mit L,R

$Ax_1 = e_1$
$LRx_1 = e_1$
$Rx_1 = y_1$
$Ly_1 = e_1$

2x2
$e_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$
$e_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$

Schnellere Variante:

$L\vec{y} = I$

$\begin{pmatrix} 2&0\\ 5&7 \end{pmatrix} \vec{y} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}$

$R\vec{x} = \vec{y}$

$Ly_1 = e_1$ (L)

$\begin{pmatrix} 1&0\\ \frac{1}{2}&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$ (e_1)

Vorwärts Einsetzen:

$y_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Rx_1 = y_1$ (R, y)

$\begin{pmatrix} 2&1\\ 0&\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Rückwärts Einsetzen:

$x_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}$

Mit jedem e_n durchführen um $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu erhalten

$x_2 = \begin{pmatrix} -1\\ 2 \end{pmatrix}$

Die erhaltenen $\vec{x}$ Vektoren zusammensetzen

$A^{-1} = (x_1\ x_2)$

$A^{-1} = (x_1\ x_2) = \begin{pmatrix} 1&-1\\ -1&2 \end{pmatrix}$

Lösungsvektor mit Matrix P,L,R berechnen

Vorwärts Einsetzen

$L\vec{y} = P\vec{b}_x$

$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -2&1&0\\ 3&-2&1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6\\ -3\\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -2&1&0\\ 3&-2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ -3\\ -6 \end{pmatrix}$

Nun Vorwärtseinsetzen:

$\vec{y} = \begin{pmatrix} -2\\ -7\\ -14 \end{pmatrix}$

Rückwärts Einsetzen

$R\vec{x} = \vec{y}$

$\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&3&5\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2\\ -7\\ -14 \end{pmatrix}$

Nun Rückwärtseinsetzen:

$\begin{pmatrix} -9\\ 21\\ -14 \end{pmatrix} = \vec{x}$

LR Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow P\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{P-Matrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\-2&1&3\\3&-3&-6 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\-3 \end{pmatrix}$ $+2 \cdot I$

$$L\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

Vorzeichen wird in L immer getauscht

$A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&5\\3&-3&-6 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\-3 \end{pmatrix}$ $-3 \cdot I$

$$L\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\3&0&1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&5\\0&-6&-9 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\-3 \end{pmatrix}$ $+2 \cdot II$

$$L\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\3&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1 \end{pmatrix}$$

L-Matrix

$A = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&5\\0&0&1 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix} = y$

R-Matrix

↘ Wird der Ergebnisvektor $\vec{b}$ gleich mitgerechnet so muss man nur noch die Gleichung $R\vec{x} = y$ lösen

---

Vorwärtseinsetzen (L-Matrix)

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1 \end{pmatrix}}^{L}\overbrace{\begin{pmatrix} -3\\1\\0 \end{pmatrix}}^{b}$$

$L y = b$ $\qquad y = L^{-1} \cdot b$

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} 0\\1\\-3 \end{pmatrix}$$

Ergebnisvektor mit P-Matrix multiplizieren!

$y_1 = 0$

$-2 \cdot 0 + 1 \cdot y_2 = 1$

$y_2 = 1$

$3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot y_3 = -3$

$y_3 = -1$

$$y = \begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen (R-Matrix)

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&3&5\\0&0&1 \end{pmatrix}}^{R}\overbrace{\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}}^{y}$$

$Rx = y$

$x_3 = -1$

$3 \cdot x_2 + 5 \cdot (-1) = 1$

$3x_2 = 6$

$x_2 = 2$

$1 \cdot x_1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$

$x_1 + 1 = 0$

$x_1 = -1$

$$x = \begin{pmatrix} -1\\2\\-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3&-3&-6\\-2&1&3\\1&1&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II + \frac{2}{3} \cdot I \\ III - \frac{1}{3} \cdot I \end{matrix}$$

$-2 + \frac{2}{3} \cdot 3$ $\qquad$ $1 + \frac{2}{3} \cdot (-3)$ $\qquad$ $3 + \frac{2}{3} \cdot (-6)$

$1 - \frac{1}{3} \cdot 3$ $\qquad$ $1 - \frac{1}{3} \cdot (-3)$ $\qquad$ $1 - \frac{1}{3} \cdot (-6)$

4 Lineare Ausgleichsrechnung

Normalengleichung

$$A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$$

$A^T \cdot A$ muss invertierbar sein

Fehlerquadratsumme

$$E(x) = \|b - Ax\|_2^2$$

Fehler soll möglichst klein werden

Residuum

$$b - A\tilde{x}$$

Wie weit ist das Modell von den Daten weg

1. Es liegt eine lineare Funktion vor
   - ↳ ist diese nicht linear so muss diese zuerst Transformiert werden
     - ↳ die Inputdaten müssen nicht linear sein!
   - ↳ $y = x_1 + x_2 \cdot 2^6$
2. Vektor $\vec{b}$ bestimmen
   - ↳ Entspricht der Lösung "y" als Vektor
3. Matrix A aufstellen (Alles was vor den Parametern x_i steht)
   - ↳ dies sind die Faktoren von $x_1, x_2, \dots x_n$
     - ↳ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ zu erhalten ist das Endziel. Durch lösen der Normalengleichung
   - ↳ 2^6 um das entsprechende Element des Vektors zu erhalten das jeweilige "z" einsetzen
   - ↳ hat ein Vektor $\vec{x}$ kein Faktor so wird der Vektor mit 1-en gefüllt mit genügenden Elementen
4. Vektor $\vec{x}$ korrekt definieren
   - ↳ besteht aus $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$
   - ↳ bei Transformationen gut aufpassen
5. Lösen mit Normalengleichung

   $$A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$$

   - ↳ Man erhält $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

   Die Funktion mit diesen Resultaten ergibt eine Gerade die durch die Echten Punkte geht

Beispiel inkl. Transformation

$$y = x_1 \cdot v^{x_2}$$ Transformation mit ln

$$\ln(y) = \ln\left(x_1 \cdot v^{x_2}\right)$$
$$= \ln(x_1) + \ln\left(v^{x_2}\right)$$
$$= 1 \cdot \ln(x_1) + \ln(v) \cdot x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ln(250) \\ 1 & \ln(251) \\ \vdots & \vdots \\ & 252 \\ & 250 \\ & 250 \\ & 252 \\ & 250 \\ 1 & \ln(251) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \ln(1'205'391) \\ \ln(2'500'438) \\ \vdots \\ 7'391'911 \\ 5'210'555 \\ 124'123 \\ 12'117'677 \\ 6'900'900 \\ \ln(8'097'345) \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \ln(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$ führt zum gesuchten $\vec{x}$

Andere Notation

$$\log(w) = a + b \cdot s + c \cdot x + d \cdot x^2$$ Modell

$$\log(w) = x_1 + s \cdot x_2 + z \cdot x_3 + z^2 \cdot x_4$$

also $x_1, x_2, x_3, x_4 = a, b, c, d$

Pivotisierung

Vertauschen der Zeilen, damit beim Rechnen keine ungünstigen kleinen Zahlen als Pivot verwendet werden.

Der Pivot ist die Zahl, mit der man beim Eliminieren teilt.

Durch Pivotisierung wird der Algorithmus Stabiler

5 Nicht-lineare Gleichungen

Nichtlineare Gleichungen kann man oft nicht sauber nach x auflösen. Deshalb sucht man Näherungslösungen. $x \approx x^*$ ← echte Lösung

Dieses Kapitel besteht aus 3 Themenblöcken:
- Skalare nichtlineare Gleichungen
- Nichtlineare Gleichungssysteme
- Nichtlineare Ausgleichsrechnung

5.1 Skalare nichtlineare Gleichungen

Arten der Problemlösung: $\cos(x) = x^3$

Nullstellenproblem: Newton-Verfahren, Bisektionverfahren

$f(x) = 0$ $\quad \cos(x) - x^3 = 0$

Fixpunktproblem: Fixpunktiteration

$g(x) = x$ $\quad \sqrt[3]{\cos(x)} = x$

Verfahren	Grundidee	Vorteil	Nachteil
Bisektion	Intervall immer halbieren	sehr zuverlässig	eher langsam
Fixpunktiteration	wiederholt in eine Funktion einsetzen	einfach	konvergiert nicht immer
Newton Verfahren	Tangente verwenden	sehr schnell	braucht Ableitung und guten Startwert

Bisektionsverfahren

1. Intervall bestimmen
   - ↳ $I = [a, b]$
2. Vorzeichenwechsel prüfen
   - ↳ Siehe unten
3. Mittelpunkt berechnen
   - ↳ $\frac{a+b}{2}$
4. $f(x_n)$ berechnen
5. neuer Intervall definieren
   - ↳ Wo liegt die Nullstelle?
   - ↳ Vorzeichen dazu berücksichtigen
6. neues Intervall halbieren

Tabelle

Voraussetzungen:

- $f(x)$ ist stetig
- $f(a)$ & $f(b)$ haben unterschiedliche Vorzeichen (Nullstelle sicher Vorhanden)

Intervall Kontrolle

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

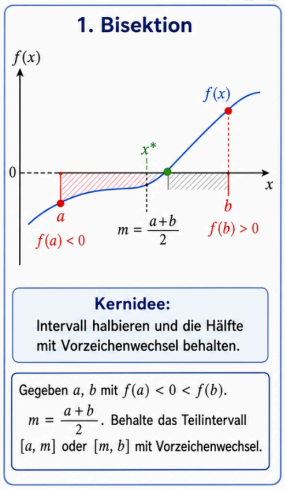
Fehlerschranke

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

Wie viele Iterationen sind nötig? nach n umgestellt.

$$n \geq \log_2\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right) - 1$$

n = Anzahl Iterationen, ε = Fehler
x_n = Näherung nach n Schritten, x^* = Exakte Lösung



Ist nicht definiert, dass $f(a) > 0 \dots$ hängt immer von der Vorgegeben Funktion ab

Iteration	x_n	$f(x_n)$	a_n	b_n
0	$x_0 = \frac{[0+1]}{2} = \frac{1}{2}$ (Intervall $[a,b]$, Mittelpunkt)	$f(x_0) = \frac{1}{a^{x_0} + x_0} = \frac{1}{0^{0.5} + 0.5} = -\frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} < 0$ Das Ergebnis ist negativ, daher wird der Mittelpunkt mit der alten negativen, Intervallgrenze ersetzt!	$f(0) > 0$	$f(1) < 0$ $\quad b_0 = 1$
1	$x_1 = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$	$f(x_1) = \frac{1}{(x_1)^2 + x_1} = \frac{1}{(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{1}{\frac{5}{16}} = \frac{16}{5} = 3.2 < 0$ Ist positiv daher nun Mittelpunkt für a_n	$f(x_1) > 0$	
2	$x_2 = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$	$f(x_2) = \frac{1}{(x_2)^2 + x_2} = \frac{1}{(\frac{3}{8})^2 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{9}{64} + \frac{24}{64}} = \frac{1}{\frac{33}{64}} = \frac{64}{33} \approx 1.94 < 0$ Negativ also mit b_n ersetzen	$f(x_2) > 0$	
3	$x_3 = \frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{16}$	$f(x_3) = \frac{1}{(x_3)^2 + x_3} = \frac{1}{(\frac{7}{16})^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{\frac{49}{256} + \frac{112}{256}} = \frac{1}{\frac{161}{256}} = \frac{256}{161} \approx 1.59 < 0$	$f(x_3) > 0$	

Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

In Worten

$$\text{neuer Wert} = \text{alter Wert} - \frac{\text{Funktionswert beim alten Wert}}{\text{Ableitung beim alten Wert}}$$

Vorgehen

1. Gleichung nach Null umstellen
   ↳ $f(x) = 0$
2. Ableitung berechnen
   ↳ $f'(x)$
3. Newton-Formel notieren
   ↳ Siehe oben
4. Startwert einsetzen
   ↳ x_n
5. $f(x_n)$ berechnen
6. $f'(x_n)$ berechnen
7. Newton-Formel anwenden
8. Resultat als neuen Wert verwenden

Abbruchbedingungen

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

$|f(x_n)| < \varepsilon$

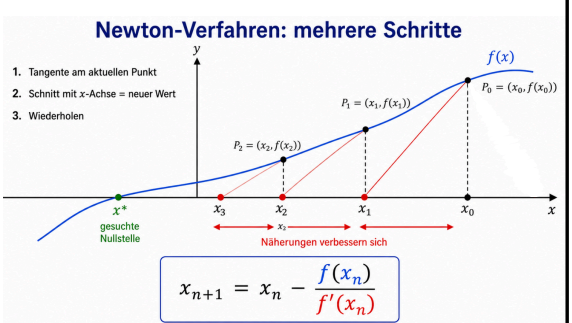
Beispiel

Gegebene Funktion:

$x^2 = 2$ Startwert $x_0 = 1$

1. $x^2 - 2 = 0$
2. $f'(x) = 2x$
3. $x_{n+1} = x_n - \frac{x^2-2}{2x}$
4. $x_{0+1} = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
5. $1^2 - 2 = -1$
6. $2 \cdot 1 = 2$
7. $x_1 = 1 - \frac{-1}{2}$

   $x_1 = 1{,}5$
8. $x_{1+1} = x_2 = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}4167$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Fixpunktiteration $\left(|f(x_1) - f(x_2)| \le K \cdot |x_1 - x_2|\right)$

$x_{n+1} = g(x_n)$ das bedeutet: $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$

Um diese Vorschrift anwenden zu können muss die Gleichung erst in die Form $x = g(x)$ gebracht werden.

Nicht jede Umformung Funktioniert.

$x^2 - 2 = 0$ $\quad x = \frac{2}{x}$ oder $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ Beide haben denselben Fixpunkt, aber verhalten sich unterschiedlich.

Die Umgeformte Gleichung muss nämlich konvergieren

Um dies zu prüfen wird das "Kontraktions" Kriterium verwendet.

Kontraktion

$|g'(x)| \le K < 1$ Prüft ob die Abstände im Intervall kleiner werden.

K ist die obere Grenze für die Steigung Darf abgeschätzt werden

Noch genauer die obere Schranke abschätzen:

1. $g''(x)$ bestimmen, 2. $g''(x) = 0$, 3. Lösen, 4. Wert in $|g(x)|$ einsetzen

Fehlerabschätzung

$|x_n - x^*| \le \frac{K^n}{1-K} \cdot |x_1 - x_0|$ a-priori Wie viele Schritte?

$n \ge \frac{\ln\left(\frac{\text{Toleranz} \cdot (1-K)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(K)}$

oder

$|x_n - x^*| \le \frac{K}{1-K} \cdot |x_n - x_{n-1}|$ a-posteriori Wie gross max Fehler?

Abbruchbedingungen:

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

$\frac{K^n}{1-K} \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$

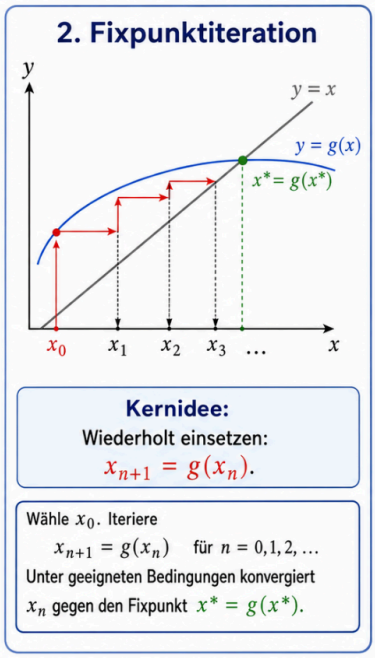
Banachscher Fixpunkt Vorgehen

1. Gleichung umformen
   ↳ $x = g(x)$

nur wenn gefragt werden muss:

2. Intervall prüfen
   ↳ $g(I) \subseteq I$ Werte aus I in g eingesetzt: Ergebnis ist wieder in I
   ↳ $0 \le g(x) \le 1$ mit $I = [0,1]$
3. Ableitung berechnen
   ↳ $g'(x)$
4. Kontraktion prüfen
   ↳ Siehe oben

5. Startwert einsetzen
   ↳ Irgend ein Punkt der im Intervall I liegt
6. Iterationen berechnen
   ↳ $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$
7. Fehler abschätzen
   ↳ Siehe oben



Beispiel

Gegebene Funktion: $\frac{1}{1+x^2} = 4x$ mit $I = [0,1]$ und $x_0 = 0$

1. $x = \underbrace{\frac{1}{4(1+x^2)}}_{g(x)}$
2. Einfach Werte aus dem Intervall in g(x) einsetzen. Wert der rauskommt muss im Vorgegebenen Intervall liegen!
3. $g'(x) = -\frac{x}{2(1+x^2)^2}$
4. $|g'(x)| \le K < 1$ $I = [0,1]$ Es muss gelten: $0 \le x \le 1$

   $\left|-\frac{x}{2(1+x^2)^2}\right| \le K < 1$

   Es gilt: $x \le 1$ und $(1+x^2)^2 \ge 1$

   $2(1+x^2)^2 \ge 2$

   Zusammen $\frac{x}{2(1+x^2)^2} \le \frac{1}{2}$ $\quad K = \frac{1}{2}$
5. $x_0 = 0$
6. $x_1 = g(x_0)$: $x_1 = \frac{1}{4(1+0^2)}$, $x_1 = 0.25$

   $x_2 = g(x_1)$: $x_2 = \frac{1}{4(1+0.25^2)}$, $x_2 \approx 0.2353$

   $x_3 = g(x_2)$: $x_3 = \frac{1}{4(1+0.2353^2)}$, $x_3 \approx 0.2369$
7. $n = 3$, $K = \frac{1}{2}$

   $|x_3 - x^*| \le \frac{K}{1-K}|x_3 - x_2|$

   $|x_3 - x^*| \le \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \cdot 0.0016}_{0{,}0016}$

   Ist genauer da es den zuletzt berechneten Wert beinhaltet

   $|x_3 - x^*| \le \frac{K^3}{1-K}|x_1 - x_0|$

   $|x_3 - x^*| \le \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} \cdot 0.25}_{0{,}0625}$

   Nach n=3 Iterationen ist der Fehler höchstens 0,0625 von x^* entfernt

5.2 Nichtlineare Gleichungssysteme

$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ mit $F(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$6x = \cos(x) + 2y,$
$8y = xy^2 + \sin(x).$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + 2y - 6x \\ xy^2 + \sin(x) - 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wird also immer als Nullstellenproblem definiert

Jacobi-Matrix

Mehrere Funktionen 1. Ableitung gesammelt als Matrix

$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ $F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$

Jede Zeile gehört zu einer Gleichung
Jede Spalte zu einer Variablen

$\begin{pmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{pmatrix}$

- Welche Variable abgeleitet wird
- Welche Funktion betrachtet wird

Newton-Verfahren für Systeme

$f(x) \approx f(x^{(k)}) + J_f(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ Linearisierung — Aktueller Punkt – Entwicklungsp.

Der Funktionswert am neuen Punkt wird näherungsweise durch den alten Funktionswert plus lineare Änderung beschrieben

$x^{(k)}$ = aktuelle Näherungspunkt
$f(x^{(k)})$ = aktuelle Fehler
$J_f(x^{(k)})$ = beschreibt wie sich f verändert

Korrektur $\delta^{(k)}$ berechnen

$J_f(x^{(0)})\delta^{(0)} = f(x^{(0)})$ $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \delta^{(k)}$

2.B $J_f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\delta^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\delta_1^{(0)} + \delta_2^{(0)} = -1 \\ \delta_1^{(0)} + 2\delta_2^{(0)} = -1. \end{matrix}$ LGS $\delta^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}$

1. Gleichungen nach Null umstellen
2. Funktion (Vektor) F(x,y) aufstellen
3. Jacobi-Matrix J_f aufstellen
4. Startwert definieren
5. Funktion am Startwert berechnen
6. Jacobi-Matrix am Startwert berechnen
7. Lineares Gleichungssystem lösen
   ↳ $J_f(x^{(0)})\delta^{(0)} = f(x^{(0)})$.
8. Neuer Punkt berechnen
9. Neuer Interations-Durchlauf mit erhaltenem Punkt
   ↳ Gehe zu Schritt 5.

Beispiel 1

Gegebene Funktionen: $\begin{matrix} 6x = \cos(x) + 2y \\ 8y = xy^2 + \sin(x) \end{matrix}$ Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

1. $\cos(x) + 2y - 6x = 0$, $xy^2 + \sin(x) - 8y = 0$
2. $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + 2y - 6x \\ xy^2 + \sin(x) - 8y \end{pmatrix}$
3. $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) - 6 & 2 \\ y^2 + \cos(x) & 2xy - 8 \end{pmatrix}$ alle Ableitungen (Gradient Zeilenweise)
4. $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Achtung hier sind x & y beide 0.5 es muss sonst klar getrennt werden
5. $f(0.5,0.5) = \begin{pmatrix} \cos(0.5) + 2\cdot 0.5 - 6\cdot 0.5 \\ 0.5\cdot 0.5^2 + \sin(0.5) - 8\cdot 0.5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.1224 \\ -3.3956 \end{pmatrix}$
6. $J_f(0.5,0.5) = \begin{pmatrix} -\sin(0.5) - 6 & 2 \\ 0.5^2 + \cos(0.5) & 2\cdot 0.5\cdot 0.5 - 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -6.4794 & 2 \\ 1.1276 & -7.5 \end{pmatrix}$
7. $J_f(x^{(0)})\delta^{(0)} = f(x^{(0)})$.
   $\begin{pmatrix} -6.4794 & 2 \\ 1.1276 & -7.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1224 \\ -3.3956 \end{pmatrix}$ $\delta^{(0)} \approx \begin{pmatrix} 0.3282 \\ 0.5021 \end{pmatrix}$
8. $x^{(1)} = x^{(0)} - \delta^{(0)}$
   $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3282 \\ 0.5021 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.1718 \\ -0.0021 \end{pmatrix}$ Das ist nun der neue Punkt der eingesetzt wird ab Schritt 5.

Nichtlineare Gleichungssysteme mit LR-Zerlegung

Die Schritte 1 - 4 bleiben gleich!

5. LR-Zerlegung der berechneten Jacobi-Matrix im Startwert
   ↳ $A = J_f(x^{(0)})$ $\quad A = LR$ Diese Zerlegung wird bei allen Iterationen wiederverwendet
6. Funktion am Startwert berechnen aber mit $-f(x^{(0)})$
   ↳ Durch eine andere Definition muss der negative Funktionswert genommen werden.
7. Erstes Dreieckssystem lösen
   ↳ $Ly = -f(x^{(0)})$
8. Zweites Dreieckssystem lösen
   ↳ $R\delta_0 = y$
9. Iteration addieren
   ↳ $x^{(1)} = x^{(0)} \oplus \delta_0$ hier wird nun δ_0 addiert nicht wie in der anderen Version Subtrahiert. Daher auch in Schritt 4. $-f(x^{(0)})$

Beispiel

Gegebene Funktionen: $\begin{matrix} 6x = \cos(x) + 2y \\ 8y = xy^2 + \sin(x) \end{matrix}$ Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

gleicher Ablauf

1. $\cos(x) + 2y - 6x = 0$, $xy^2 + \sin(x) - 8y = 0$
2. $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + 2y - 6x \\ xy^2 + \sin(x) - 8y \end{pmatrix}$
3. $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) - 6 & 2 \\ y^2 + \cos(x) & 2xy - 8 \end{pmatrix}$ alle Ableitungen (Gradient Zeilenweise)
4. $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Achtung hier sind x & y beide 0.5 es muss sonst klar getrennt werden
5. $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -\sin(0) - 6 & 2 \\ 0^2 + \cos(0) & 2\cdot 0\cdot 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} = A$ $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -\frac{23}{3} \end{pmatrix}$
6. $f(0,0) = \begin{pmatrix} \cos(0) + 2\cdot 0 - 6\cdot 0 \\ 0\cdot 0^2 + \sin(0) - 8\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -\frac{23}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_{0,1} \\ \delta_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $\quad \delta_0 = \begin{pmatrix} 0.173913 \\ 0.021739 \end{pmatrix}$
9. $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.173913 \\ 0.021739 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.173913 \\ 0.021739 \end{pmatrix}$ Das ist nun der neue Punkt der eingesetzt wird ab Schritt 6.

Stoppkriterium

tol = Toleranz z.B 10^{-6}

$\|\delta_k\| < \text{tol.}$ $\Leftarrow$ (indirekt) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \text{tol}$ (Direkt) $\|f(x^{(k+1)})\| < \text{tol}$

Norm darf frei gewählt werden

Beispiel 2

Gegebene Funktionen: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ $\quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_f \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

Linearisierung lösen:

$f(x,y) \approx f(1,0) + J_f(1,0)\cdot(x - x^{(0)})$

$\approx \begin{pmatrix} 1^2 + 0^2 \\ 2\cdot 1\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y \end{pmatrix}}$

Nullstellen finden:

$\begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit diesem Punkt neue Iteration machen

5.3 Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Es wird λ^* gesucht sodass $\|F(\lambda^*)\|_2$ (Fehlervektor) möglichst klein ist

Der Fehler soll also möglichst klein werden.

Teilweise kann ein nichtlineares Modell mit Transformationen z.B. log, quadrieren... linearisiert werden. Dann wie in Kapitel 4 vorgehen

$$\phi(\vec{\lambda}) := \frac{1}{2}\|\vec{F}(\vec{\lambda})\|_2^2 = \frac{1}{2}\vec{F}(\vec{\lambda})^T\vec{F}(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2}|\vec{F}(\vec{\lambda})|^2$$ mit Residuum / Fehler $F_i(\lambda) = f(t_i, \lambda) - y_i$

5.3.1 Gauß-Newton-Verfahren

$$J_F(\lambda^{(k)})^T J_F(\lambda^{(k)}) s^{(k)} = -J_F(\lambda^{(k)})^T F(\lambda^{(k)})$$

Es gilt Normalengleichung $A^TAx = A^Tb$

- $A = J_F(\lambda_n)$ Jacobi-Matrix von $\vec{F}(\vec{\lambda})$ — Ist diese Matrix nicht invertierbar, so funktioniert der Algorithmus nicht!
- $\vec{b} = -F(\lambda_n)$
- $\vec{x} = s^{(k)} = (\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_n)$

Da $J_F(\lambda)$ meist nicht quadratisch ist, wird der Trick mit der Normalengleichung angewendet, dann gilt:

- $A = J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)$ $(A = LR)$
- $\vec{b} = -J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_n)$
- $\vec{x} = \vec{j}$ $(s^{(k)} = \vec{j})$

$$\underbrace{J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)}_{A}\underbrace{\vec{j}}_{\vec{x}} = \underbrace{-J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_n)}_{\vec{b}}$$

Vorgehen

1. Modell anschauen
   ↳ Messpunkte: (x_i, y_i), Modell: $f(x)$, gesuchte Parameter: $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2. Residuenfunktion aufstellen
   ↳ $F_i(\vec{\lambda}) = f(x_i, \vec{\lambda}) - y_i$ $\Rightarrow$ $\vec{F}(\vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{\lambda}) \\ F_2(\vec{\lambda}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{\lambda}) \end{pmatrix}$
3. Jacobi-Matrix berechnen $(J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}))$
   ↳ Ableitungen von $\vec{F}(\vec{\lambda})$ nach allen gesuchten Parameter $\vec{\lambda}$
4. Startwert $\vec{\lambda}_0$ einsetzen und berechnen
   ↳ $\vec{F}(\vec{\lambda}_0)$, $J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)$
5. Gauss-Newton-LGS aufstellen
   $A = J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)^T J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)$, $\vec{j} = \vec{\lambda}_{n+1} - \vec{\lambda}_n$, $\vec{b} = -J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_0)$ $\Rightarrow$ $A\vec{j} = \vec{b}$
6. LR-Zerlegung durchführen
   ↳ Siehe Kapitel 3
7. Vorwärtssubstitution
   ↳ $L\vec{y} = -J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_n)$
8. Rückwärtssubstitution
   ↳ $R\vec{j} = \vec{y}$
9. Neue Näherung berechnen
   ↳ $\vec{\lambda}_{n+1} = \vec{\lambda}_n + \vec{j}$
10. Stoppkriterium prüfen
    $\|\vec{\lambda}_{n+1} - \vec{\lambda}_n\|_2 < \varepsilon$ = $\|\vec{j}\|_2 < \varepsilon$ → Siehe Kapitel 1.2 (Norm 2 Vektor)
11. Neue Iteration beginnen. Parameter in Schritt 4.

Beispiel

Gegeben:

Messpunkte: $P_n(x_i, y_i)$ $P_1 = (2, 1.5)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (6, 3)$

Modell: $f(x) = \sqrt{ax + b}$

Gesuchte Parameter: $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Startwert: $\vec{\lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Siehe oben

2. $\vec{F}(\vec{\lambda}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2a+b} - 1.5 \\ \sqrt{3a+b} - 2 \\ \sqrt{6a+b} - 3 \end{pmatrix}$ $F_i(\vec{\lambda}) = f(x_i, \vec{\lambda}) - y_i$

3. $J_{\vec{F}}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2a+b}} & \frac{1}{2\sqrt{2a+b}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3a+b}} & \frac{1}{2\sqrt{3a+b}} \\ \frac{3}{\sqrt{6a+b}} & \frac{1}{2\sqrt{6a+b}} \end{pmatrix}$

4. $\vec{F}(\vec{\lambda}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1.5 \\ \sqrt{3} - 2 \\ \sqrt{6} - 3 \end{pmatrix}$ & $J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)}_{A}\underbrace{\vec{j}}_{\vec{x}} = \underbrace{-J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_n)}_{\vec{b}}$$

5. $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ mit: $A = J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)^T J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)$

   $\vec{b} \approx \begin{pmatrix} 0.9669 \\ 0.2201 \end{pmatrix}$ mit: $\vec{b} = -J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_0)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_0)$

   Somit: $\begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\vec{j} = \begin{pmatrix} 0.9669 \\ 0.2201 \end{pmatrix}$

6. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{11} & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{22} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{11} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9669 \\ 0.2201 \end{pmatrix}$ (L, $\vec{y}$, $\vec{b}$) $L\vec{y} = \vec{b} = -J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_n)^T \vec{F}(\vec{\lambda}_n)$ $\vec{y} \approx \begin{pmatrix} 0.9669 \\ -0.0436 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9669 \\ -0.0436 \end{pmatrix}$ (R, $\vec{j}$, $\vec{y}$) $R\vec{j} = \vec{y}$ $\vec{j} \approx \begin{pmatrix} 0.6136 \\ -0.9605 \end{pmatrix}$

9. $\vec{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6136 \\ -0.9605 \end{pmatrix}$ (Alter Wert ($i=0 \Rightarrow$ Startwert), Neuer Wert $\vec{j}$)

   $\vec{\lambda}_1 \approx \begin{pmatrix} 1.6 \\ -0.96 \end{pmatrix}$ $a \approx 1.6$, $b \approx -0.96$.

10. $\sqrt{(0.6136)^2 + (-0.9605)^2} \approx 1.1398$ < Stoppkriterium?

11. $\vec{F}(a,b) = \begin{pmatrix} \sqrt{2a+b} - 1.5 \\ \sqrt{3a+b} - 2 \\ \sqrt{6a+b} - 3 \end{pmatrix}$ mit: $a = 1.6136$, $b = -0.9605$

4. $\vec{F}(\vec{\lambda}_1) \approx \begin{pmatrix} 0.0055 \\ -0.0302 \\ -0.0469 \end{pmatrix}$, $J_{\vec{F}}(\vec{\lambda}_1) \approx \begin{pmatrix} 0.6642 & 0.3321 \\ 0.7615 & 0.2538 \\ 1.0159 & 0.1693 \end{pmatrix}$

5. $A \approx \begin{pmatrix} 2.0530 & 0.5859 \\ 0.5859 & 0.2034 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \approx \begin{pmatrix} 0.0669 \\ 0.0138 \end{pmatrix}$

6. $L \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.2854 & 1 \end{pmatrix}$, $R \approx \begin{pmatrix} 2.0530 & 0.5859 \\ 0 & 0.0362 \end{pmatrix}$

7. $\vec{y} \approx \begin{pmatrix} 0.0669 \\ -0.0053 \end{pmatrix}$

8. $\vec{j} \approx \begin{pmatrix} 0.0747 \\ -0.1475 \end{pmatrix}$

9. $\vec{\lambda}_2 \approx \begin{pmatrix} 1.6136 \\ -0.9605 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0747 \\ -0.1475 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.6883 \\ -1.1080 \end{pmatrix}$

10. $\|\vec{j}\|_2 = \sqrt{0.0747^2 + (-0.1475)^2}$.

6 Interpolation

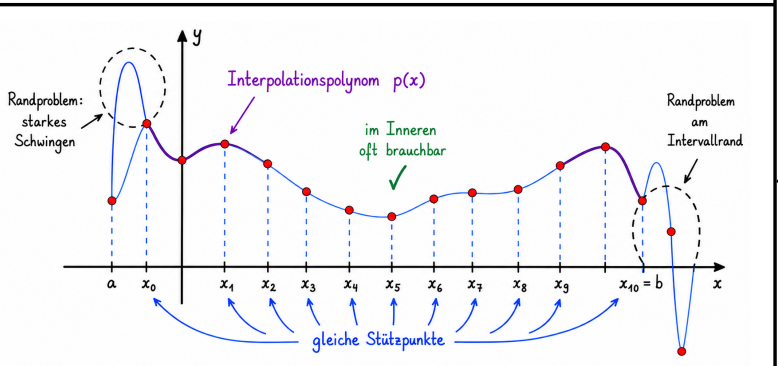
Anders als bei Ausgleichsrechnungen, muss bei der Interpolation die gesuchte Funktion EXAKT durch die Datenpunkte laufen!
Gesucht wird also ein Polynom $P_n(x)$

Es gibt immer genau 1 Polynom mit Grad n für das Interpolationsproblem (Der Grad soll minimal sein)

Der Grad des Polynoms ist immer 1 tiefer als die Anzahl Stützstellen

Messpunkte

$P(x_i, y_i)$ wobei: Stützstellen = x_i
Stützwerte = y_i



Problem: Polynom geht durch alle Punkte, kann aber am Rand schlecht schätzen

6.1 Lagrange-Interpolation

Basispolynom

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

daraus folgt:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Jeder Stützwert y_i bekommt sein eigenes Basispolynom $L_i(x)$

Vorgehen

1. Tabelle der Stützstellen und Stützwerten erstellen

i	0	1	2	...	n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	...	y_n

↳ Sind alle Stützwerte = 0
↳ Nullstellenprodukt formel!
↳ P(-1)=0, P(7)=0 ⇒ (x+1)(x-7)

2. Für jeden Punkt $P_i(x_i, y_i)$ ein Basispolynom bestimmen

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Zähler = x- alle anderen Stützstellen
Nenner = anstelle x wird x_i eingesetzt
x_i wird nie an der Stelle x_j eingesetzt!

3. Interpolationspolynom aufstellen

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

4. Falls gefragt: ausmultiplizieren

5. Falls ein Wert gesucht ist, direkt einsetzen

$$p_n(x^*)$$

Beispiel

Gegeben sind die Punkte: $P_0(-2,0)$, $P_1(-1,6)$, $P_2(0,4)$, $P_3(1,-6)$, $P_4(2,0)$

Es gibt 5 Stützstellen, somit $\deg(P) \leq 4$

1.

i	0	1	2	3	4
x_i	−2	−1	0	1	2
y_i	0	6	4	−6	0

2. $x_1 = -1$:

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)x(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)}$$

Da y_0 & $y_4 = 0$ sind werden diese Terme im Polynom wegfallen daher müssen dessen Basispolynome nicht aufgestellt werden

3. $p(x) = 6L_1(x) + 4L_2(x) - 6L_3(x)$

$$p(x) = 6\cdot\frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 4\cdot\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} - 6\cdot\frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)}$$

4. $p(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4$

5. $p(1) = 1 + 2 - 5 - 8 + 4 = -6.$

Äquidistante Stützstellen

Der Abstand der Stützstellen ist immer gleich gross.
Deshalb kann eine vereinfachte Form des Lagrangepolynoms verwendet werden.

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - j}{i - j}$$

ist unabhängig von: x_0 und Schrittweite h

Vorteil: Wir rechnen nicht mehr direkt mit den echten Stützstellen
Wir nummerieren durch mit $t \cdot h$

Beispiel

x_i	1	1.5	2	2.5	3
t_i	0	1	2	3	4

Gegebene Stützstellen mit Abstand h
Zuteilung von t mit (0,1,2,3...,n)

Basispolynom bauen:

$$L_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \qquad L_2(t) = \frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_3(t) = \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}$$

Die Stützwerte bleiben gleich

$$p(t) = 6\cdot\frac{(t-0)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} + 4\cdot\frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} - 6\cdot\frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}$$

6.2 Fehlerschätzung

$$|f(x) - p(x)|$$ Abstand zwischen echter Funktion und Interpolationspolynom

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Stützstellen - 1

Beispiel: Gegeben: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ somit $n = 2$ & $f(x) = \ln(x)$

1. Ableitungen bestimmen $f^{(n+1)}$ also 3. Ableitung
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ daher: $f^{(3)}(\xi) = \frac{2}{\xi^3}$

2. Alles einsetzen:

$$\frac{\frac{2}{\xi^3}}{3!}(x-1)(x-1.5)(x-2)$$

3. ξ einsetzen $\xi \in [0.5, 2]$ Punkte im Intervall — Welcher? hier 0,5
da ξ im Nenner ist wird 0,5 genommen

Wie gross kann $\frac{2}{\xi^3}$ höchstens sein?

4. x-Wert einsetzen
Es muss in der Fragestellung gefragt werden Wie gross ist der maximale Fehler bei x = 0,5 } Dann x einsetzen!

6.3 Newton - Côtes - Quadratur

Ziel ist es ein Integral näherungsweise zu berechnen

1. Stützstellen wählen.
2. Durch diese Stützstellen ein Interpolationspolynom legen.
3. Nicht $f(x)$, sondern das Polynom integrieren.

Für das berechnen des Integrals gibt es geeignete Regeln

Theoretisch könnte man auch ein Interpolationspolynom aufstellen und dieses Integrieren ist natürlich extrem genau, aber sehr aufwändig

$$\int_a^b p(x)\,dx$$

Einfache Trapez-Regel (N = 1 ⇒ 2 Stützstellen)

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \quad \text{mit Intervall } I=[a,b]$$

Trapez-Regel ist einfach aber sehr Grob

$f(x)$ ist hier eigentlich das Interpolationspolynom $p(x)$

Fehler: $|E_T| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max|f''(x)|$ max = Grösster Wert des Intervalls für x einsetzen Betrag !!!

Gegebene Punkte: $(6, 0.5)$, $(18, 0.8)$

1. $\int_6^{18} f(x)\,dx$ mit: $f(6)=0.5$, $f(18)=0.8$
2. also: $a=6$, $b=18$ ⇒ $b-a=12$
3. $\frac{12}{2}(0.5+0.8) = 7.8$

Zusammengesetzte Trapez-Regel

Die Zusammengesetzte Trapezregel ist schon viel Genauer

$$T_h(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

mit h als Schrittweite (Abstand zwischen den Punkten)

Muster: 1, 2, 2, 2, 1

Fehler: $|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2\max|f''(x)|$ max = Grösster Wert des Intervalls für x einsetzen Betrag !!!

x	6	9	12	15	18
$f(x)$	0.5	2	3.5	2.5	0.8

h = 3

$$T_h = \frac{3}{2}(0.5+2\cdot 2+2\cdot 3.5+2\cdot 2.5+0.8) = 25.95$$

Simpson-Regel (N = 2 ⇒ 3 Stützstellen)

$a,\quad a+h,\quad b$

Genauer, wenn die Kurve gekrümmt ist

$$\frac{h}{3}\left(f(a)+4f(a+h)+f(b)\right) \quad \text{mit} \quad h=\frac{b-a}{2}$$

Fehler: $|E_S| \le \frac{(b-a)^5}{2880}\max|f^{(4)}(x)|$ max = Grösster Wert des Intervalls für x einsetzen Betrag !!!

$\int_6^{18} f(x)\,dx$ mit $f(6)=0.5$, $f(12)=3.5$, $f(18)=0.8$

a = 6
b = 18
a+h = 12
h = 6

$h = \frac{18-6}{2} = 6$, $a+h = 6+6 = 12$

$$\frac{6}{3}(0.5+4\cdot 3.5+0.8) = 30.6$$

Zusammengesetzte Simpson-Regel

n muss gerade sein! (Anzahl Teilintervalle)

Extrem genau, wenn die Kurve gekrümmt ist

$$S_h(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)$$

Muster: 1, 4, 2, 4, 2, 4, ..., 2, 4, 1

Fehler: $|E_S| \le \frac{b-a}{180}h^4\max|f^{(4)}(x)|$ max = Grösster Wert des Intervalls für x einsetzen Betrag !!!

Punkte:

x	6	9	12	15	18
$f(x)$	0.5	2	3.5	2.5	0.8

⟶ mit h = 3

Teilintervall: $[6,9],[9,12],[12,15],[15,18]$ mit n = 4 Gerade !

$$\int_6^{18} f(x)\,dx \quad S_h = \frac{3}{3}(0.5+4\cdot 2+2\cdot 3.5+4\cdot 2.5+0.8)$$

$$= 26.3$$

7 Anfangswertprobleme (AWP)

$y'(x) = f(x, y(x))$ mit Startwert $y(x_0) = y_0$

Ziel ist es eine DGL 1. Ordnung Numerisch anzunähern
Dazu gibt es mehrere Verfahren die dazu verwendet werden:

- explizites Euler-Verfahren
- implizites Euler-Verfahren
- Runge-Verfahren
- Heun-Verfahren
- Runge-Kutta-Verfahren

} Einschritt-Verfahren

Im Kern verfolgen alle Verfahren dasselbe Prinzip. Sie benutzen die Steigung aus einem bekannten Wert y_k den nächsten Wert y_{k+1} zu berechnen.

Das allgemeine Vorgehen ist:

1. Problem in gewünschte Form bringen
   ↳ $y'(x) = f(x, y(x))$
2. Intervall in Stücke aufteilen
   ↳ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ mit gewünschter Schrittweite h
3. Mit bekanntem Startwert beginnen
   ↳ $y_0 = y(x_0)$
4. Rekursiv berechnen
   ↳ $y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$
5. Untersuchen wie gut die Näherungen sind
   ↳ • lokaler Fehler • Konsistenz
   • globaler Fehler • Konvergenz • Ordnung des Verfahrens

Trick: DGL höherer Ordnung in 1. Ordnung

Ziel ist es immer die Form $z'(x) = f(x, z(x))$ zu erhalten.

Vorgehen:

1. Ordnung der DGL bestimmen
   ↳ $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(n)}(x)$
2. Neue Variablen definieren
   ↳ $z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y'(x),\ z_3(x) = y''(x),\ z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$
   ↳ Ordnung wird also zu Variable-Index plus 1 oder anders gesagt: Ordnung minus 1 = Variablen-Index
3. Vektor z(x) aufstellen
   ↳ $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$
4. Alle Komponenten ableiten
   ↳ $z'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) \end{pmatrix}$ es gilt: $\begin{matrix} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = z_3(x) \\ z_3'(x) = z_4(x) \end{matrix}$ und $z_n'(x) = y^{(n)}(x)$
5. Höchste Ableitung ersetzen
   ↳ $z_n'(x) = y^{(n)}(x)$ und $y(x) \to z_1(x),\ y'(x) \to z_2(x),\ y''(x) \to z_3(x)$
6. System in Standardform notieren
   ↳ $z'(x) = f(x, z(x))$

Diese Schritte dienen nur für das Verständnis

1. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

2. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

3. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben: $y'''(x) = 5x\,y''(x) - \sin(x)y(x)y'(x) - \cos(y(x))$

1. $y'''(x)$ 3. Ordnung — es werden also drei neue Variablen benötigt
2. $z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y'(x),\ z_3(x) = y''(x).$ und $y'''(x)$ wird zu: $z'(x)$
3. $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$
4. $z'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix}$ da aber folgendes definiert wurde $\begin{matrix} z_1'(x) = y'(x) \\ z_2(x) = y'(x) \end{matrix}$ folgt: $z_1'(x) = z_2(x)$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \text{rechte Seite der ursprünglichen DGL} \end{pmatrix}$$

5. $z'(x) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ 5x\,z_3(x) - \sin(x)z_1(x)z_2(x) - \cos(z_1(x)) \end{pmatrix}$ $y', y'' \dots y^{(n)}$ mit Variablen ersetzen ($z_{n(x)}$)

$y'''(x) = 5x\,y''(x) - \sin(x)y(x)y'(x) - \cos(y(x))$

$z_{\text{Ordnung}+1}(x)$
$y'' = z_{2+1} = z_3$

Explizites Euler-Verfahren

$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$ mit Schrittweite h $h = \frac{b-a}{n}$ im Intervall $[a,b]$ mit n Schritten

neuer Wert = alter Wert + Schrittweite · Steigung am alten Punkt

Beispiel

Gegeben: $y'(x) = e^{2x} - 2y(x), \quad y(0) = 1$ mit $[0,1]$ mit $n = 2$ Schritten

1. Schrittweite $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$
2. X-Stellen bestimmen: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ (Dazwischenliegende Werte mit Schrittweite bestimmen)
3. Formel anwenden: (So wird dann y_{k+1} bestimmen)

$y_1 = 1 + 0.5(e^{2\cdot 0} - 2 \cdot 1)$
$= 0.5$

$y'(x) = e^{2x} - 2y(x), \quad y(0) = 1$

$y_2 = 0.5 + 0.5(e^{2\cdot 0.5} - 2 \cdot 0.5)$
≈ 1.359

Erhaltener y-Wert für y_k und neuer x-Wert einsetzen

Implizites Euler-Verfahren

$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$ mit Schrittweite h $h = \frac{b-a}{n}$ im Intervall

neuer Wert = alter Wert + Schrittweite · Steigung am neuen Punkt

Beispiel

Gegeben: $y'(x) = e^{2x} - 2y(x), \quad y(0) = 1$ mit $[0,1]$ mit $n = 2$ Schritten

1. Schrittweite: $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$
2. X-Stellen bestimmen: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ (Dazwischenliegende Werte mit Schrittweite bestimmen)
3. Formel anwenden:

$$y_{k+1} = y_k + h(e^{2x_{k+1}} - 2y_{k+1}).$$

4. Auflösen nach y_{k+1}: Wenn das nicht geht: Newton-Verfahren (Ein Nullstellenproblem lösen)

$$y_{k+1} = \frac{y_k + h e^{2x_{k+1}}}{1 + 2h}$$

5. Werte einsetzen: $y(0) = 1$ $x_1 = 0.5$, $y_0 = 1$, $h = 0.5$

$$y_1 = \frac{y_0 + 0.5e^{2x_1}}{1 + 2 \cdot 0.5} = \frac{1 + 0.5 \cdot e^{2 \cdot 0.5}}{1 + 2 \cdot 0.5} \approx 1.180$$

6. Nächster Schritt

$$y_2 = \frac{y_1 + 0.5\, e^{2 \cdot x_2}}{1 + 2 \cdot 0.5} = \frac{1.180 + 0.5 \cdot e^{2 \cdot 1}}{1 + 2 \cdot 0.5} \approx 2.437$$

Fehler- und Konvergenzanalyse

1. lokaler Diskretisierungsfehler
2. globaler Diskretisierungsfehler
3. Konsistenz
4. Konvergenz

} Sind Gütekriterien, um Abschätzungen machen zu können bezüglich der verschiedenen Algorithmen.

Lokaler Diskretisierungsfehler

Beschreibt die entstehende Abweichung von der exakten Lösung nach einem Schritt

lokaler Fehler = exakter Wert nach einem Schritt − numerischer Wert nach einem Schritt

$$\eta(x,h) = y(x) - y(x+h) + h\varphi(x, y(x), y(x+h), h)$$

Näherung von Y(x+h) | Exakte Lösung von Y(x+h)

φ: ist die entsprechende Verfahrensfunktion

Konsistenz

Wenn die Schrittweite h kleiner wird, muss ein einzelner Schritt lokal weniger Fehler machen.

$\eta(x,h) \leq Ch^{p+1}$ Aussage: Das Verfahren ist konsistent von Ordnung p

$\eta(x,h) = O(h^2)$ $2 = p+1 \Rightarrow p = 1$

Beide Euler-Verfahren sind konsistent 1. Ordnung!

Globaler Diskretisierungsfehler

Wie weit ist meine Näherung y_k nach mehreren Schritten vom exakten Wert entfernt?

$$e(x_k,h) = y(x_k) - y_k$$

Näherungs Wert | Exakter Wert

Konvergenz

Wenn die Schrittweite h kleiner wird, muss auch die Näherung besser werden.

$e(x_k,h) \leq Ch^p$ Aussage: Das Verfahren ist konvergent von Ordnung p

Beide Euler-Verfahren sind konvergent 1. Ordnung!

Korrolar: Zusammenhang Konsistenz und Konvergenz

Konsistenz p-ter Ordnung $\Rightarrow$ Konvergenz p-ter Ordnung

Bedeutung Ordnung P

Die Ordnung sagt, wie schnell der Fehler kleiner wird, wenn h kleiner wird.

- $p = 1$: Halbierst du h, halbiert sich der Fehler.
- $p = 2$: Halbierst du h, wird der Fehler etwa viermal kleiner.
- $p = 4$: Halbierst du h, wird der Fehler etwa sechzehnmal kleiner

Runge-Verfahren (Mittelpunkt-Verfahren) (Explizit)

Das Verfahren hat die Idee die Steigung in der Mitte des Intervalls zu verwenden

Euler nimmt die Steigung am Anfang des Schrittes

Hat die Ordnung 2

$$y_{k+1} = y_k + hr_2$$

$r_1 = f(x_k, y_k)$ Steigung am Anfang

$r_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}r_1\right)$ Steigung in der Mitte

Vorgehen

1. Steigung am Anfang berechnen: $r_1 = f(x_k, y_k)$
2. Mittelpunkt berechnen: $x_{\text{mitte}} = x_k + \frac{h}{2}$, $y_{\text{mitte}} = y_k + \frac{h}{2}r_1$
3. Steigung im Mittelpunkt berechnen: $r_2 = f(x_{\text{mitte}}, y_{\text{mitte}})$
4. Formel anwenden: $y_{k+1} = y_k + hr_2$

Beispiel Gegeben: $y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2.$

daher: $f(x,y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

1. $r_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0 + 1 = 1$
2. $x_{\text{mitte}} = 0 + \frac{0.2}{2} = 0.1$, $y_{\text{mitte}} = 1 + \frac{0.2}{2} \cdot 1 = 1 + 0.1 = 1.1$
3. $r_2 = f(0.1, 1.1) = 0.1 + 1.1 = 1.2$
4. $y_1 = y_0 + hr_2 = 1 + 0.2 \cdot 1.2 = 1.24$

also: $y(0.2) \approx 1.24$ (x_1, y_1)

Heun-Verfahren (Explizit)

Das Verfahren hat die Idee die Anfangs- und Endsteigung zu mitteln

Hat die Ordnung 2

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(r_1 + r_2)$$

mit:

Anfangssteigung: $r_1 = f(x_k, y_k)$

$r_2 = f(x_k + h, y_k + hr_1)$ Endsteigung

Vorgehen

1. Anfangssteigung berechnen: $r_1 = f(x_k, y_k)$
2. Endpunkt Schätzen: $x_{\text{ende}} = x_k + h$, $y_{\text{ende}} = y_k + hr_1$
3. Endsteigung berechnen: $r_2 = f(x_{\text{ende}}, y_{\text{ende}})$
4. Steigungen mitteln: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(r_1 + r_2)$

Beispiel Gegeben: $y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2.$

daher: $f(x,y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

1. $r_1 = f(0,1) = 0 + 1 = 1$
2. $x_{\text{ende}} = 0 + 0.2 = 0.2$, $y_{\text{ende}} = 1 + 0.2 \cdot 1 = 1.2$
3. $r_2 = f(0.2, 1.2) = 0.2 + 1.2 = 1.4$
4. $y_1 = 1 + \frac{0.2}{2}(1 + 1.4) = 1.24$

also: $y(0.2) \approx 1.24$ (x_1, y_1)

Runge-Kutta allgemein

Mehrere Steigungen (r_j) innerhalb eines Schrittes berechnen und gewichtet (b_j) mitteln.

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=1}^{s} b_j r_j \qquad r_j = f\left(x_k + c_j h,\ y_k + h\sum_{\ell=1}^{s} a_{j\ell} r_\ell\right)$$

$$\triangleq \quad y_{k+1} = y_k + h(b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_s r_s)$$

- r_j sind Zwischensteigungen.
- c_j sagt, wo im Schritt die Steigung berechnet wird.
- $a_{j\ell}$ sagt, welche vorherigen Steigungen für den Zwischenwert verwendet werden.
- b_j sagt, wie stark jede Steigung am Ende gewichtet wird.
- s ist die Anzahl der Stufen, also die Anzahl der Steigungen.

Diese Methode kann für alle Vorhärigen Vorgehen angewendet werden.

c_j, $a_{j\ell}$, b_j: Sind jeweils durch das jeweilige Verfahren klar gegeben

Sie unterscheiden sich hauptsächlich durch:

- Anzahl der Steigungen r_i
- Wo die Steigungen berechnet werden
- Wie die Steigungen am Ende gewichtet werden
- Explizit oder implizit
- Ordnung p

Um den r_j zu berechnen wird immer die Vorhärige Steigung benötigt und die entsprechenden x-und y-Stellen

Beispiel an RK-4

1. $r_1 = f(x_k, y_k)$
2. $r_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} r_1\right)$
3. $r_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} r_2\right)$
4. $r_4 = f(x_k + h, y_k + h r_3)$

$$r_j = f\left(x_k + c_j h,\ y_k + h\sum_{\ell=1}^{s} a_{j\ell} r_\ell\right)$$

c_j und $a_{j\ell}$ sind immer gegeben und können aus dem Bucher-Schema entnommen werden

---

Butcher-Schema

Das Butcher-Schema ist eine kompakte Tabelle für ein Runge-Kutta-Verfahren.

Anstelle die lange Formel zu notieren, schreibt man eine Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

- linke Spalte c_i: wo im Schritt die Steigung berechnet wird
- mittlerer Block a_{ij}: welche alten Steigungen in den Zwischenwert eingehen
- untere Zeile b_i: wie die Steigungen am Ende gewichtet werden

Indexierung von "a" kann verwirren nun ist der zweite Index s (Stufe) dies ist auch in der Ursprünglichen Formel im Summenzeichen enthalten.

- Mit c_j werden die x-Stellen berechnet
- Mit $a_{j(\ell)s}$ werden die y-Stellen brechnet
- Mit b_j in der Endformel die Gewichtung

Bucher-Schema anwenden

1. Anzahl der Stufen erkennen (Anzahl benötigter r_j)
   ↳ Anzahl Zeilen (von a_{js})
2. linke Spalte lesen (c_j)
   ↳ bestimmen die x_k-Stelle $x_k + c_i h$
3. Mittlerer Block lesen (a_{js})
   ↳ bestimmen die x_k-Stellen $y_k + h(a_{i1} r_1 + a_{i2} r_2 + \cdots + a_{is} r_s)$
4. Für jede Zeile r_j berechnen
   ↳ $r_i = f(x_k + c_i h,\ y_k + h(a_{i1} r_1 + \cdots + a_{is} r_s))$
5. Unterste Zeile lesen (b_i) und anwenden
   ↳ $y_{k+1} = y_k + h(b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_s r_s)$

Für jede Zeile einzeln anwenden

Klassisches Runge-Kutta RK4 (Explizit)

RK4 ist einfach eine ganz bestimmtes Runge-Kutta-Verfahren Wobei 4 Steigungen benutzt werden

Hat die Ordnung 4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$$

Muster von b_i: 1 : 2 : 2 : 1

Beispiel mit Butcher-Schema

Gegeben:

$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2.$ daher: $f(x,y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Gesucht ist:
- $r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4$
- $r_i = f(x_k + c_i h,\ y_k + h(a_{i1} r_1 + a_{i2} r_2 + a_{i3} r_3 + a_{i4} r_4))$
- $y_{k+1} = y_k + h(b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 + b_4 r_4)$

1. Erste Zeile lesen: $0 \mid 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0$

$r_1 = f(x_0 + 0h,\ y_0 + h(0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4)) \Rightarrow r_1 = f(0,1) = 1$

2. Zweite Zeile lesen: $\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0$

$r_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + h\left(\frac{1}{2}r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4\right)\right) = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2}r_1\right) = 1.2$

3. Dritte Zeile lesen $\frac{1}{2} \mid 0 \ \ \frac{1}{2} \ \ 0 \ \ 0$

$r_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + h\left(0r_1 + \frac{1}{2}r_2 + 0r_3 + 0r_4\right)\right) = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2}r_2\right) = 1.22$

4. Vierte Zeile lesen: $1 \mid 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0$

$r_4 = f(x_0 + 1h,\ y_0 + h(0r_1 + 0r_2 + 1r_3 + 0r_4)) = f(x_0 + h,\ y_0 + hr_3) = 1.444$

5. Unterste Zeile lesen: $\frac{1}{6} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{1}{6}$

$y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{6}r_1 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{3}r_3 + \frac{1}{6}r_4\right) = y_0 + \frac{h}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$

Umgeformt ergibt das genau unsere schon bekannte Formel

6. Werte einsetzen:

$y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(1 + 2 \cdot 1.2 + 2 \cdot 1.22 + 1.444) = 1.2428$

x_1 ↓ y_1 ↓ also: $y(0.2) \approx 1.2428$

Es gibt noch viele weitere Verfahren wie z.B:
- Implizite Mittelpunktregel
- Implizite Trapetzregel

Jedes Verfahren hat seine Vor- und Nachteile besonders ob das Verfahren Implizit oder Explizit ist

z.B Explizit = einfacher, aber oft weniger stabil
Implizit = aufwendiger, aber oft stabiler

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1h & 1h & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= f(x_k, y_k), \\ r_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + h\frac{1}{2}r_1\right), \\ r_3 &= f\left(x_k + h, y_k + h(-r_1 + 2r_2)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{1}{6}r_1 + \frac{2}{3}r_2 + \frac{1}{6}r_3\right). \end{aligned}$$

Verfahren	Typ	p	Butcher-Schema	Formeln zum Anwenden
Explizites Euler	explizit	1	$\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 0h,\ y_k + 0h)$ $y_{k+1} = y_k + 1hr_1$
Implizites Euler	implizit	1	$\begin{array}{c\|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 1h,\ y_k + 1hr_1)$ $y_{k+1} = y_k + 1hr_1$ $= y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$
Runge / Mittelpunkt	explizit	2	$\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 0h,\ y_k + 0h)$ $r_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}r_1\right)$ $y_{k+1} = y_k + h(0r_1 + 1r_2)$
Heun	explizit	2	$\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 0h,\ y_k + 0h)$ $r_2 = f(x_k + 1h,\ y_k + 1hr_1)$ $y_{k+1} = y_k + h(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2)$
Klassisches RK4	explizit	4	$\begin{array}{c\|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 0h,\ y_k + 0h)$ $r_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}r_1\right)$ $r_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}r_2\right)$ $r_4 = f(x_k + 1h,\ y_k + 1hr_3)$ $y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{1}{6}r_1 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{3}r_3 + \frac{1}{6}r_4\right)$
Implizite Mittelpunktregel	implizit	2	$\begin{array}{c\|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$	$r_1 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2}r_1\right)$ $y_{k+1} = y_k + 1hr_1$
Implizite Trapezregel	implizit	2	$\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$	$r_1 = f(x_k + 0h,\ y_k + 0h)$ $r_2 = f\left(x_k + 1h,\ y_k + \frac{h}{2}(r_1 + r_2)\right)$ $y_{k+1} = y_k + h(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2)$ $= y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$

8 DGL-Systeme

Im vorherige Kapitel 7 wurde ein Trick gezeigt, wie man von einem DGL höherer Ordnung zu einem DGL-System 1. Ordnun kommt.
hier wird nun gezeigt wie ein solches System gelöst wird.

DGL höherer Ordnung
⇓
DGL-System 1. Ordnung
⇓
Euler / Heun / Runge / RK anwenden

Skalares DGL
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

DGL-System
$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)$$

Die einzigen Unterschiede zu Skalaren DGL sind:
Yu und f sind jetzt Vektoren.

Ein DGL-System wird ganz genau gleich wie eine einzelne DGL gelöst.

Bekannte Verfahren komponentenweise auf Vektor anwenden

Beispiel

Gegeben: $y'' - y'^2 - y(y-1) = -1$ mit $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ $h = 0.5$

x_0 = Wert in der Klammer = 0
y_0 = Vektor = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Umformen in DGL-System: (Trick anwenden!)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2^2 + y_1(y_1 - 1) - 1 \end{pmatrix} \text{ mit } x_0 = 0 \text{ und } \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{pmatrix}$$

2. Verfahren anwenden: (hier Explizites Euler-Verfahren)

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) \Rightarrow \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0)$$

3. Werte einsetzen:

$$\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1^2 + 0(0-1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Verfahrensformel anwenden:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) \qquad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit: $y(0.5) \approx 0.5$, $y'(0.5) \approx 1$. $x_1 = 0{,}5$

Nächste Iteration dann mit diesen Werten rechnen

Ergänzung Interpolation

Vandermonde-Matrix

i	0	1	2	3	4
x_i	−2	−1	0	1	2
y_i	0	6	4	−6	0

Grad des gesuchten Polynoms = Stützstellen x_i − 1
5 − 1 = 4

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ Gesuchtes Polynom

$$a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 + a_3 \cdot (-2)^3 + a_4 \cdot (-2)^4 = 0$$
$$a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + a_3 \cdot (-1)^3 + a_4 \cdot (-1)^4 = 6$$
$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 = 4$$
$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + a_4 \cdot 1^4 = -6$$
$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + a_4 \cdot 2^4 = 0$$

Schneller

$$\begin{pmatrix} x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 & x_i^4 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4$$

Kontrolle mit den Punkten

$p(-2) = 0$

$p(-1) = 6$

$p(0) = 4$

$p(1) = -6$

$p(2) = 0$

Kondition

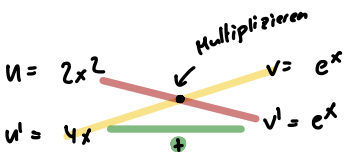
$$cond(V) = \|V\| \cdot \|V^{-1}\|$$

Produktregel $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot z'(x) \dots$$

z.B $2x^2 \cdot e^x$



$f'(x) = 4x \cdot e^x + 2x^2 \cdot e^x$

$= e^x(4x + 2x^2)$

$= 2e^x(2x + x^2)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel $f(x) = u(v(x))$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

z.B $(-x^2 + 1)^3$

$u = (v)^3$ $\quad v = -x^2 + 1$

$u' = 3(v)^2$ $\quad v' = -2x$

$3 \cdot (-x^2+1)^2 \cdot (-2x)$

$= -6x(1 - x^2)^2$

Äussere-Ableitung • innere-Ableitung

$f(x) = e^{3x+2}$ $\quad f'(x) = (e^{3x+2}) \cdot 3$

Äussere-Ableitung

Innere-Ableitung

e^{3x+2} $\quad (4x^2+1)^4$

$\sqrt{2x+1}$ $\quad \ln(2x)$ $\quad \sin(4x)$

FORMELN INTEGRAL & DIFFERENTIAL

	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	ax^{a-1}	x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
Trigo	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
	$1 + \tan^2(x)$ Oder siehe unten	$\tan(x)$	$-ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
	$-1 - \cot^2(x)$	$\cot(x)$	
	$-\cos$	$-\sin$	$\cos + c$
	$\sin$	$-\cos$	$-\sin + c$
	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$	$x * \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}$
	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}(x)$	$x * \cos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x)$	$x\tan^{-1}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$
e	$-e^{-x}$	e^{-x}	$-e^{-x} + C$
	$-ae^{-x}$	$e^{-x \cdot a}$	$-\frac{1}{a}e^{-x \cdot a} + C$
	e^x	e^x	$e^x + C$
	$\ln(x) * a^x$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} * a^x + C$
ln	$\frac{1}{x}$	$\ln(ax)$ $= \ln(a) + \ln(x)$	$x * \ln(ax) - x + C$
	$\frac{1}{x+a}$ $\frac{2z}{1+z^2}$	$ln(x+a)$ Ln (1:z²) Kettenregel!	$(x+a) * \ln(x+a) - x + C$
	$\frac{1}{x * \ln^2(x)}$	$\frac{1}{\ln(x)}$	
	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} * x\sqrt{x} + C$
Streckung	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{ax} = a \cdot x^{-1}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert x\rvert) + C$
Verschiebung		$\frac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a\rvert) + C$

$f(x \cdot k)$	$\frac{1}{k} \cdot F(x \cdot k)$
$f(x+k)$	$F(x+k)$

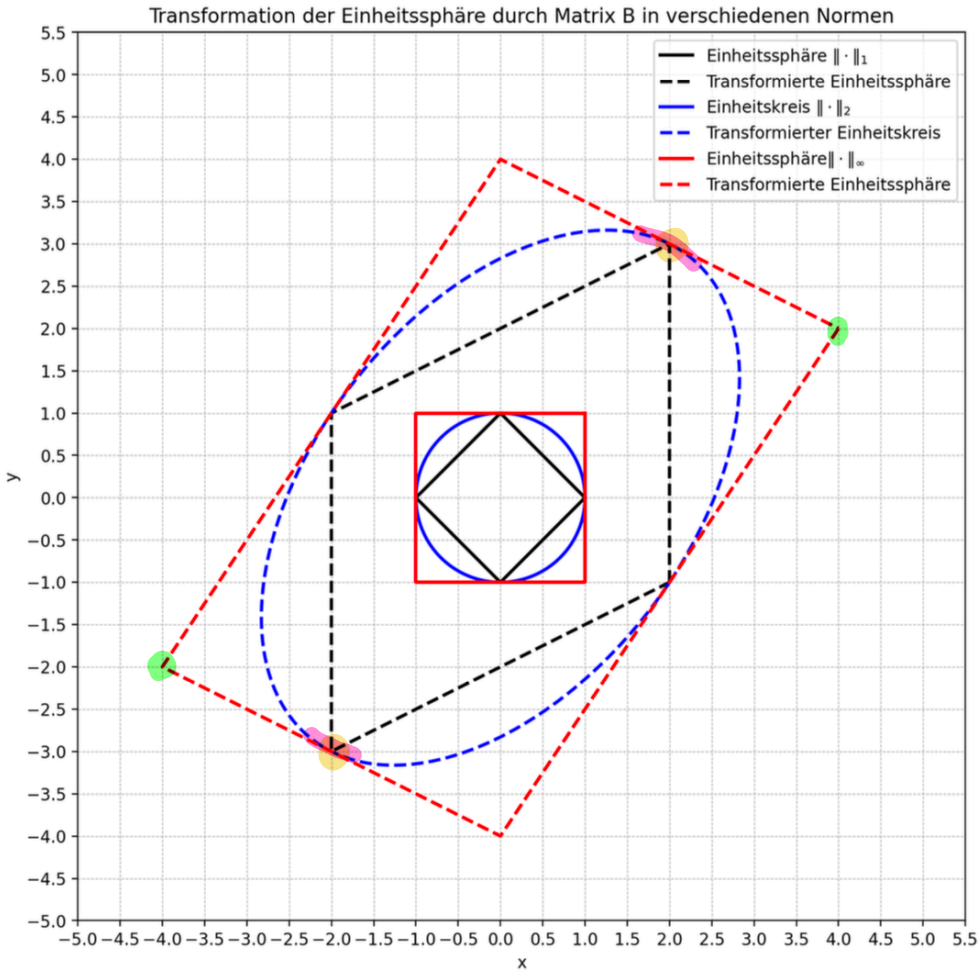
Bsp:

$f(x) = \cos(3x) \rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$

$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow F(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ $\quad \tan' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\tan'' = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$



$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alle gestrichelten Formen gehören zur Matrix B
die Anderen zu $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\|B\|_1$ = (-2,-3), (2,3) 2+3 = 5

$\|B\|_\infty$ = (-4,-2), (4,2) max = 4

$\|B\|_2$ = (-2,-3), (2,3) $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Norm	Vektornorm für $x = (x, y)$	Form der Einheitsmenge	Matrixnorm berechnen	In der Grafik beachten
1 Norm	$\|x\|_1 = \|x\| + \|y\|$	Raute	Maximale Spaltensumme	Punkt suchen, bei dem $\|x\| + \|y\|$ am grössten ist
2 Norm	$\|x\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$	Kreis	$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$	Punkt mit grösstem normalen Abstand zum Ursprung suchen
3 Norm	$\|x\|_3 = \sqrt[3]{\|x\|^3 + \|y\|^3}$	Rundliche Form zwischen Raute und Kreis	$\|A\|_3 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_3}{\|x\|_3}$	Punkt suchen, bei dem die 3 Norm am grössten ist
∞ Norm	$\|x\|_\infty = \max(\|x\|, \|y\|)$	Quadrat	Maximale Zeilensumme	Punkt suchen, bei dem die grösste Einzelkoordinate maximal ist

X & y sind Koordinaten (Punkte)

Norm	Bedingung für die Einheitssphäre	Form in 2D
1 Norm	$\|x_1\| + \|x_2\| = 1$	Raute
2 Norm	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$	Kreis
3 Norm	$\sqrt[3]{\|x_1\|^3 + \|x_2\|^3} = 1$	rundliche Form zwischen Raute und Kreis
∞ Norm	$\max(\|x_1\|, \|x_2\|) = 1$	Quadrat