

Transport von Stoffen

Grundprinzip

Änderungsrate = Zuflüsse - Abflüsse + Produktion - Vernichtung = Bilanzgleichung

$$\dot{n} = \sum I_{n,i} + \sum \Pi_{n,i} = \text{Stoffmengenänderung}$$

$$\dot{n}_i = \sum I_{n,i,\text{in}} - \sum I_{n,i,\text{out}} + \sum \Pi_{i,\text{prod}} - \sum \Pi_{i,\text{vern}}$$

I_N = Stoffmengenströme

Π_N = Produktions- / Vernichtungsrate

$$\dot{V} = \sum I_{V,i}$$

Stoffmenge

$$N = N_A \cdot n$$

N : Teilchen

N_A : Avocado-Konstante ($6,022 \cdot 10^{23}$)

n : Stoffmenge [mol]

Masse vs. Stoffmenge

$$n = \frac{m}{M_0} = m = M_0 n$$

m : Masse Probe [kg], [g]

u : Stoffmenge [mol]

M_0 : Molzahl, Molmasse $\left[\frac{\text{kg}}{\text{mol}}\right], \left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$

Konzentration (Niveau)

$$c = \frac{n}{V} = n = c \cdot V \quad \dot{n} = V \cdot \dot{c}$$

c : Stoffmengenkonzentration $\left[\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right]$

n : Stoffmenge des gelösten Stoff [mol]

V : Volumen $[\text{m}^3]$

"n" mit Stoffmengen Formel ersetzt

$$c = \frac{m}{M_0 V}$$

Ausgleich der Konzentration

(Konstitutive Beziehung)
Antrieb = Konzentrationsunterschied

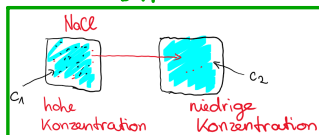
$$I_n = G_n (c_1 - c_2) \quad G_n = \frac{I_n}{c_1 - c_2}$$

Diffusion

I_n : Stoffmengenstrom $\left[\frac{\text{mol}}{\text{s}}\right]$

G_n : Stoffleitwert $\left[\frac{\text{L}}{\text{s}}\right]$

$c_{1/2}$: Konzentration $\left[\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right]$



Konvektiver Transport

Konstitutive Beziehung:

$$I_{n,\text{conv}} = c I_V$$

$I_{n,\text{conv}}$: Stoffmengenstrom $\left[\frac{\text{mol}}{\text{s}}\right]$

c : Konzentration $\left[\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right]$

I_V : Volumenstrom $\left[\frac{\text{L}}{\text{s}}\right]$

Antrieb = Druckunterschied
Salz wird mit dem Wasser mitgenommen

$$I_{\text{laminar}}: I_V = G_V \cdot \Delta p \rightarrow G_V = \eta \cdot g \cdot \eta$$

Wenn Wasser von Tank 2 nach Tank 1 fließt:

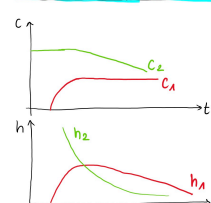
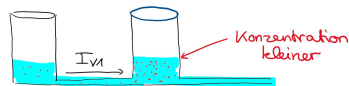
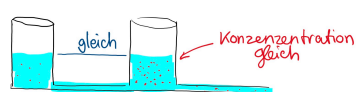
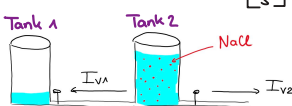
$$I_{n1} = c_2 I_{V1}$$

Wenn Wasser von Tank 1 nach Tank 2 fließt:

$$I_{n1} = c_1 I_{V1}$$

Für den Abfluss aus Tank 2:

$$I_{n2} = c_2 I_{V2}$$



Muster kann variieren

$$I_n = c \cdot I_V$$

$$\dot{n} = v \cdot \dot{c}$$

$$\dot{n} = I_n - \Pi_n$$

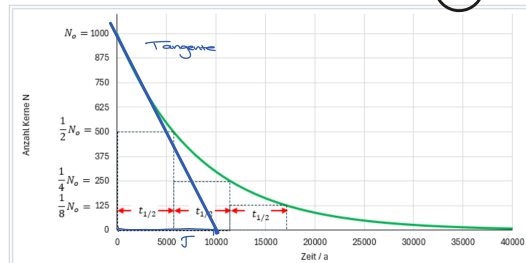
$$I_n = \dot{n} + \Pi_n$$

$$I_n = v \cdot \dot{c} + \Pi_n$$

Chemische Reaktion



Radioaktiver Zerfall



$$\Pi_N = \lambda N$$

$$\dot{N} = -\Pi_N$$

$$\dot{N} = -\lambda N$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Pi_N(t) = \Pi_{N,0} e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad \tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- τ = Zeitkonstante
- λ = Zerfallskonstante
- $t_{1/2}$ = Halbwertszeit
- N = Anzahl radioaktiver Kerne oder Stoffmenge des radioaktiven Stoffes
- $N(t)$ = Anzahl Kerne zum Zeitpunkt t
- $\dot{N}$ = zeitliche Änderungsrate von N
- Π_N = Zerfallsrate oder Aktivität

Effektive Halbwertszeit

$$\dot{n} = -\Pi_{\text{rad}} - I_{\text{bio}}$$

mit

$$\dot{n} = -(\lambda_{\text{rad}} + \lambda_{\text{bio}})n$$

$$\frac{1}{t_{1/2,\text{eff}}} = \frac{1}{t_{1/2,\text{rad}}} + \frac{1}{t_{1/2,\text{bio}}}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_{\text{rad}} + \lambda_{\text{bio}}$$

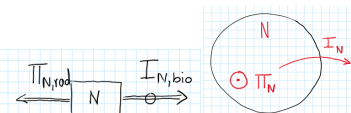
$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

$$\Pi_{\text{rad}} = \lambda_{\text{rad}} \cdot N$$

$$\Pi_{\text{bio}} = \lambda_{\text{bio}} \cdot N$$

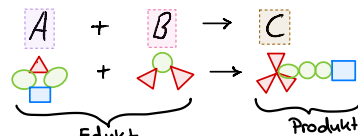
$$\Pi_{\text{rad}} = \lambda_{\text{rad}} n = \frac{\ln 2}{t_{1/2,\text{rad}}} n$$

$$I_{\text{bio}} = \lambda_{\text{bio}} n = \frac{\ln 2}{t_{1/2,\text{bio}}} n$$



Vollständige Reaktion

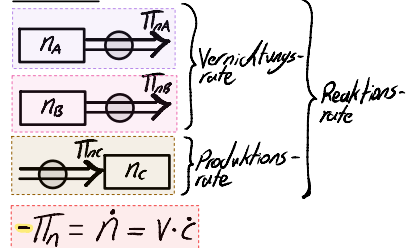
Edukt wird vollständig aufgebraucht



$$k = \frac{\Pi_{n,C}}{V \cdot c_A \cdot c_B} = \frac{V \cdot \dot{c}}{V \cdot c_A \cdot c_B} = \frac{\dot{c}}{c_A \cdot c_B}$$

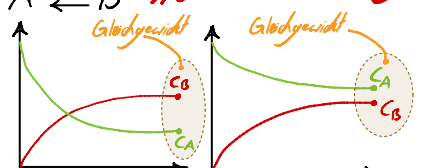
$$\Pi_{n,C} = V \cdot k \cdot c_A \cdot c_B$$

Modell

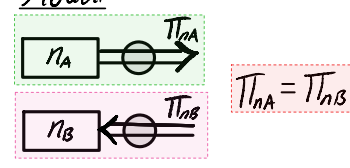


Unvollständige Reaktion

Edukte und Produkte bleiben übrig (Gleichgewicht)



Modell



$$\Pi_n = V \cdot k \cdot (c_B - K_{\text{eq}} \cdot c_A) = k = \frac{\Pi_n}{V \cdot (c_B - K_{\text{eq}} \cdot c_A)} = \frac{V \cdot \dot{c}}{V \cdot (c_B - K_{\text{eq}} \cdot c_A)}$$

K_{eq} = Gleichgewichtskonstante

$$K_{\text{eq}} = \frac{c_B^{\text{eq}}}{c_A^{\text{eq}}}$$

$$K_{\text{eq}} = \frac{k \cdot V \cdot c_B - \Pi_n}{k \cdot V \cdot c_A}$$

$$K_{\text{eq}} = \frac{k \cdot V \cdot c_B - V \cdot \dot{c}}{k \cdot V \cdot c_A}$$

$$\Pi_n = \dot{n} \quad \dot{n} = V \cdot \dot{c}$$

$\dot{c} = 0$ wenn Gleichgewicht!

Achtung! ist die Π_n Positiv oder Negativ? Vorzeichen beachten!

0. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k$

3. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A \cdot c_B \cdot c_C$

1. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A$ oder $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_B$

3. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A^2 \cdot c_B$ oder $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A \cdot c_B^2$

2. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A \cdot c_B$

3. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A^3$

2. Ordnung $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_A^2$ oder $\Pi_n = V \cdot k \cdot c_B^2$

Die Summe der Exponenten ergeben die Ordnung

Anfangswertproblem (AWP)

Klassifizierung:

1) Ordnung

→ höchste vorkommende Ableitung

- $\dot{y} \rightarrow 1.$ Ordnung
- $\ddot{y} \rightarrow 2.$ Ordnung

2) Gewöhnlich vs. Partiiell

- **Gewöhnlich (ODE):** nur eine Variable
→ $\dot{y} = f(t, y)$
- **Partiiell (PDE):** mehrere Variablen
→ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3) Linear vs. Nichtlinear

- **Linear:** y nur in 1. Potenz, keine Produkte
→ $\dot{y} + a(t)y = f(t)$
- **Nichtlinear:** z. B. $y^2, y\dot{y}$
→ $\dot{y} = y^2$

5) Autonom vs. Nicht autonom

- **Autonom:** kein t
→ $\dot{y} = ay$
- **Nicht autonom:** t kommt vor
→ $\dot{y} + ty = 0$

4) Homogen vs. Nicht homogen

- **Homogen:** kein Zusatzterm
→ $\dot{y} = ay$
- **Nicht homogen:** mit Zusatzterm
→ $\dot{y} = ay + b$

6) Explizit vs. Implizit

- **Explizit:** Ableitung isoliert (Höchste Ordnung isoliert)
→ $\dot{y} = f(t, y)$
- **Implizit:** nicht isoliert
→ $\dot{y} + y + t = 0$

Eindimensionale AWP:

Standardform:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

"Integrieren"

- $a, b \in \mathbb{R}$ (oft positiv)
- linear, nicht homogen (falls $b \neq 0$)

Lösung der Differentialgleichung:

$$y(t) = \frac{b}{a} + \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

mit Anfangsbedingung:

$$y(0) = y_0$$

Wenn kein $\ominus$ im Standardform dann auch hier kein $\ominus$!

Stationärer Wert:

$$y^* = \frac{b}{a}$$

oder

$\dot{U}(t) = 0$
dann
nach $U(t)$ auflösen

Verhalten:

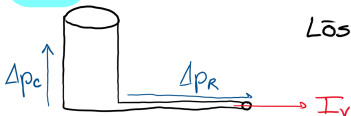
- $a < 0 \rightarrow$ Lösung konvergiert gegen y^*
- $a > 0 \rightarrow$ Lösung wächst exponentiell

Wichtig: $j = \text{konstant} \rightarrow y(t) = (\text{konstante}) \cdot t$

Beispiele:

Bsp. 1 Ausfluss aus einem Tank

Lösung für $\Delta p_c(t)$



$$\begin{aligned} \dot{V} &= -I_v \\ V(0) &= V_0 \\ \Delta p_c &= \Delta p_R \\ V &= C_v \cdot \Delta p_c \\ I_v &= \frac{\Delta p_R}{R_v} \end{aligned}$$

V_0, C_v, R sind konstant!

Bilanzgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -I_v \\ C_v \cdot \dot{\Delta p_c} &= -\frac{\Delta p_R}{R_v} \\ C_v \dot{\Delta p_c} &= -\frac{\Delta p_c}{R_v} \\ \dot{\Delta p_c} &= -\frac{\Delta p_c}{C_v R_v} = -\frac{1}{C_v R_v} \Delta p_c + 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow y = \Delta p_c$$

$$a = \frac{1}{C_v R_v}; b = 0$$

$$\Delta p_c(t) = \left(\frac{0}{\frac{1}{C_v R_v}}\right) + \left(\Delta p_{c0} - \frac{0}{\frac{1}{C_v R_v}}\right)e^{-\frac{t}{R_v C_v}}$$

$$\Delta p_c(t) = \Delta p_{c0} e^{-t/R_v C_v}$$

Bsp 2: Unbeschränkter Wachstum

$$\dot{N} = \pi_N \quad (\pi_N: \text{Geburtenrate})$$

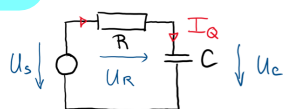
$$\pi_N = \lambda \cdot N$$

$$\Rightarrow \dot{N} = \lambda \cdot N = -(-\lambda) \cdot N$$

$$N(0) = N_0$$

$$N(t) = N_0 e^{(-\lambda) \cdot t} = N_0 e^{\lambda \cdot t}$$

Bsp 3: Laden eines Kondensators



$$U_c(0) = 0 \quad \text{Gesucht } U_c(t)$$

$$\dot{Q} = I_Q$$

$$Q = C \cdot U_c$$

$$I_Q = \frac{U_R}{R}$$

$$U_s - U_R - U_c = 0 \Rightarrow U_R = U_s - U_c$$

$$\text{Bilanzgl. } \dot{Q} = I_Q$$

$$C \cdot \dot{U}_c = \frac{U_R}{R}$$

$$C \cdot \dot{U}_c = \frac{1}{R} \cdot U_R = \frac{1}{R} (U_s - U_c)$$

$$C \cdot \dot{U}_c = \frac{U_s}{R} - \frac{1}{R} \cdot U_c$$

$$\dot{U}_c = \frac{U_s}{R \cdot C} - \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_c$$

$$\dot{U}_c = -\frac{1}{RC} U_c + \frac{U_s}{RC}$$

$$\dot{y} = -a \cdot y + b$$

$$U_c(t) = \left(\frac{U_s}{\frac{1}{RC}}\right) + \left(0 - \frac{U_s}{\frac{1}{RC}}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{aligned} &= U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= U_s (1 - e^{-t/RC}) \end{aligned}$$

Zeitkonstante:

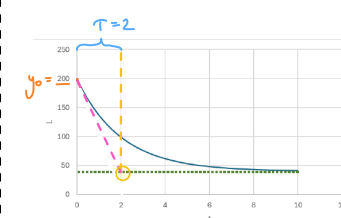
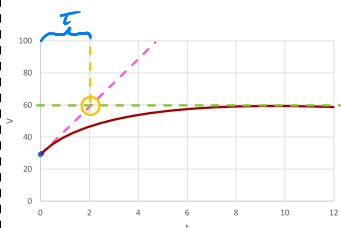
$$\tau = \frac{1}{a}$$

Wichtig: a muss der positive Faktor von y sein

$$\dot{y} = -a y + b$$

Lösung der AWP skizzieren:

1. Startpunkt markieren
2. Steigung ausrechnen mit den Startwerten → in $\dot{y}$ einsetzen
3. Tangente Zeitkonstante τ Steigung einzeichnen
4. Stationärer Wert ausrechnen → Asymote markieren
5. exponentielle Kurve skizzieren



Gedämpfte Schwingung

$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \Omega_0^2 y = 0$

Bedeutung der Terme:

- $\ddot{y} \rightarrow$ Beschleunigung
- $2\delta \dot{y} \rightarrow$ Dämpfungsterm (1. Ordnung)
- $\Omega_0^2 y \rightarrow$ Schwingungsterm
 - $\delta = 0 \rightarrow$ ungedämpft (Amplitude konstant)
 - $\delta > 0 \rightarrow$ gedämpft (Amplitude nimmt ab)
 - $\delta < 0 \rightarrow$ instabil (Amplitude wächst) ⚠

Ungedämpfte Schwingung

$\ddot{y} + \Omega_0^2 y = 0$

- keine Dämpfung
- reine Schwingung

👉 Lösung: sinus-/cosinusförmig

Kreisfrequenz:

$\Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

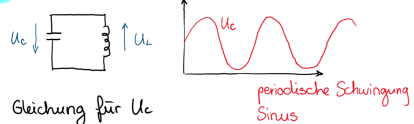
Periodendauer:

$T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

Achtung in Schwingungs-Formeln $\rightarrow \Omega^2$
 $\rightarrow$ Wurzel ziehen!

Beispiele:

Bsp. Kondensator + supraleitende Spule (R=0)



Gleichung für U_C

$\dot{Q} = I_Q$
 $Q = C \cdot U_C$
 $U_L = L \cdot \dot{I}_Q$
 $U_C + U_L = 0$
Bilanzgl. $\dot{Q} = I_Q$
 $C \cdot \ddot{U}_C = \dot{I}_Q$
keine Gl. für I_Q , nur eine $\dot{I}_Q$

Trick: Erste Gleichung noch einmal ableiten:

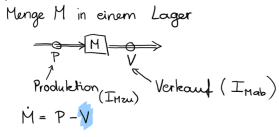
$\ddot{Q} = \dot{I}_Q$
 $C \cdot \ddot{U}_C = \frac{U_L}{L}$
 $C \cdot \ddot{U}_C = \frac{1}{L} \cdot U_L = \frac{1}{L} \cdot (-U_C)$

$\ddot{U}_C = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C$
 $\ddot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C = 0$

ungedämpft! Kein Term mit erster Ableitung
Periode T?

$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$
 $\Omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Bsp. Produktionszyklus



$\dot{P} = k(M_{Ziel} - M)$ k: Faktor

Gleichung für M
 $\dot{M} = P - V$

Trick: noch einmal ableiten:

$\ddot{M} = \dot{P} - \dot{V}$
 $\ddot{M} = \dot{P}$, weil V konstant

$\ddot{M} = \dot{P} = k(M_{Ziel} - M)$

$\ddot{M} - k M_{Ziel} + k \cdot M = 0$

$\ddot{M} + k \cdot M - k \cdot M_{Ziel} = 0$

$k = \frac{\Omega_0^2}{2}$
 $T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$

Bsp. $V = p \cdot \frac{M}{M_{Ziel}} \Rightarrow \dot{V} = p \cdot \frac{\dot{M}}{M_{Ziel}}$

$\dot{M} = P - V$

$\ddot{M} = \dot{P} - \dot{V}$

$\ddot{M} = k(M_{Ziel} - M) - \frac{p}{M_{Ziel}} \cdot \dot{M}$

$\ddot{M} - k M_{Ziel} + k \cdot M + \frac{p}{M_{Ziel}} \cdot \dot{M} = 0$

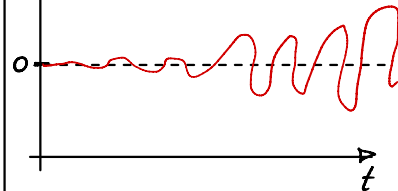
$\ddot{M} + \frac{p}{M_{Ziel}} \cdot \dot{M} + k \cdot M - k \cdot M_{Ziel} = 0$

Dämpfungsterm
ungedämpft $\frac{p}{M_{Ziel}} = 0$

wenn Dämpfungsterm < 0

👉 $\delta < 0 \rightarrow$ instabil (Amplitude wächst) ⚠

je nach Aufgabenstellung
z.B. 2 für 2 Zellen



$\Omega^2 = \Omega_0^2 - \delta^2$ Dämpfung

Ungedämpft:

$\ddot{y} + k y = 0$

$T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ mit $\Omega = \Omega_0$

Gedämpft

$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \Omega_0^2 y = 0$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}}$ mit $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$

Qualitative Lösungssätze - DGL 1.Ord.

Erzeugende Funktion $\Rightarrow F(y,t)$

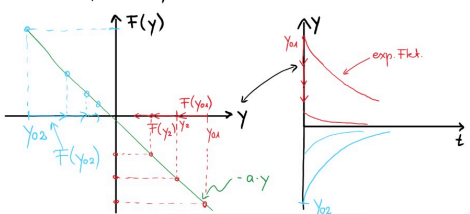
$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = F(y,t)$ $F(y,t) = a \cdot y + b$

👉 wie schnell ändert sich y

Bsp. 1 Lineare DGL

$\dot{y} = -a \cdot y$ und $y(0) = y_0$
 $a \in \mathbb{R}^+$

$F(y) = -a \cdot y$



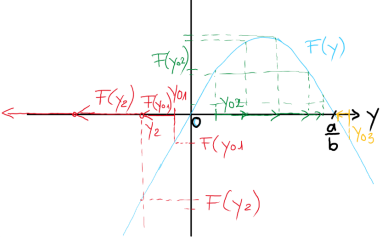
$F(y_{01}) < 0 \Rightarrow \dot{y} < 0 \Rightarrow y(t)$ nimmt ab.

$F(y_{02}) > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0 \Rightarrow y(t)$ nimmt zu.

Wenn: $\dot{y} = 0 \Rightarrow y(t)$ bleibt konstant

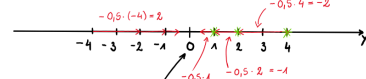
Bsp. 2 Logistisches Wachstum

$F(y) = \dot{y} = a \cdot y - b y^2$ und $y(0) = y_0$ $a, b \in \mathbb{R}^+$
 $y = \frac{b}{a}$

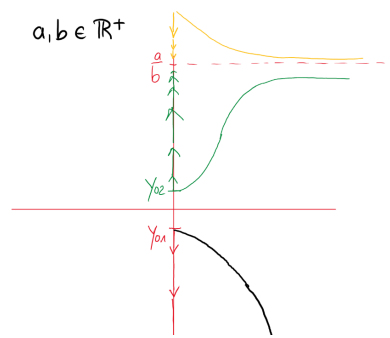


Vektorfeld + Gleichgewichtspunkte 1-dim.

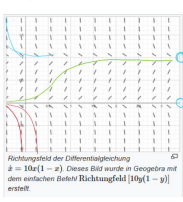
$\dot{y} = -0.5 \cdot y$ $y(0) = 4$



Gleichgewichtspunkt: $F(y) = 0$
 $-0.5 \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0$



Logistisches Wachstum



$\frac{a}{b} \leftarrow$ stabil
 $0 \leftarrow$ instabil

Taschenrechner

deSolve (Gleichung) $y' = 2 \cdot y$ (Abhängige Variable) x, y (Unabhängige Variable)

Funktion zum lösen von Differentialgleichungen

y' : Der Strich wird bei folgender Taste aufgerufen $\frac{d}{dx}$

Differentialgleichungslöser

Gleichung: $y' = 2 \cdot y$
 Beispiel: $y' = 2y$
 Unabhängige Var: x
 Abhängige Var: y
 Bedingung: (Optional) Anfangswertproblem
 Bedingung: (Optional)
 Beispiel: $y(0) = 1$
 OK Abbruch

Richtungsfeld anzeigen lassen

- Graph hinzufügen
- Menü, 3, 8
- Mit Anfangsbedingung:

$2B \quad y(0) = 1$

$x=0$
 $y=1$

d1: ☒ $y1' = 2 \cdot y1$...
 $(x_0, y_1): (0, 1)$

Im Calculator normal mit y
 Im Graphen mit $y1 \dots y_n$

Allgemeines Vorgehen

1. Bilanzgleichungen
2. Konstitutive Beziehungen
3. Was sind Konstanten?
Was sind Änderungen?

4. Was sind Konstanten, was nicht?

5. Bilanzgleichung ableiten?
Konstitutive Beziehungen ableiten?

Konstanten fallen weg
 andere Terme erhalten einen Punkt

$V = C_V \cdot \Delta p_C \Rightarrow \dot{V} = C_V \cdot \dot{\Delta p_C}$

Da der Konstante wert mit Δp_C multipliziert wird, fällt dieser NICHT weg

6. In Form der DGL bringen

$\dot{y} = -ay + b$

$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \Omega_0^2 y = 0$

7. Lösung aufstellen

$y(t) = \frac{b}{a} + \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$

$y(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi)$

Graphen zeichnen

1. Gleichung aufstellen
2. Werte einsetzen
3. Stationärer Wert $\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N^*$
↳ Dort nähert er sich an

Konstante Lösungen

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine konstante Lösung der autonomen DGL $y' = f(y)$. Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

- Stabil Benachbarte Lösungen werden **angezogen**
- Instabil Benachbarte Lösungen werden **abgestossen**
- Semi-Stabil Anziehung auf einer, Abstoßung auf der anderen Seite

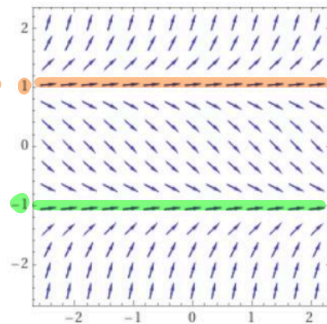
Beispiel Nur Autonome DGL's haben diese Eigenschaften: Stabil, ... Da eine solche Funktion die Form $y' = f(y)$ hat und daher nur durch y beschrieben wird. Sonst $y' = f(x, y)$

Autonom $\rightarrow y' = y^2 - 1$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1$: Konstante Lösung
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = -1$: Konstante Lösung

Werte in der Nähe der Konstanten Lösung einsetzen

- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
- $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow$ Instabil
- $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
- $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow$ Stabil
- $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



Explizites Euler-Verfahren

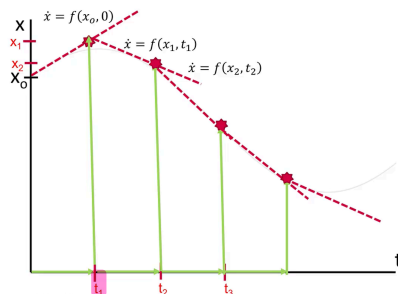
$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(x_k, t_k)\Delta t$ mit $\Delta t =$ Schrittweite

Beispiel

Gegeben: $\dot{x} = -x$ und $x(0) = 100$ mit $\Delta t = 0.1$

Erster Schritt: $x(0.1) = x(0) + f(100)(0.1)$
 $= 100 - (100)(0.1)$
 $= 90 \rightarrow y_1$

Zweiter Schritt: $x(0.2) = x(0.1) + f(90)(0.1)$
 $= 90 - (90)(0.1)$
 $= 81$



Dynamische Systeme

System DG (oder siehe Trick nächste Seite)

DG höherer Ordnung → System von DG 1. O

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{dx^2}{dt^2} \dots a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_n$$

$$y_1 = x, y_2 = \frac{dx}{dt}, y_3 = \frac{dx^2}{dt^2}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_0 y_1 + a_1 y_2 + \dots + a_{n-1} y_{n-1} + a_n$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = y_3$$

Graphische Lösung von System DG

$$\dot{x} = f_1(x, y)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y)$$

1) Nullklinen bestimmen (Ableitung=0)

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow f_1(x, y) = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow f_2(x, y) = 0$$

2) Gleichgewichtspunkt (Schnittpunkte der Nullklinen)

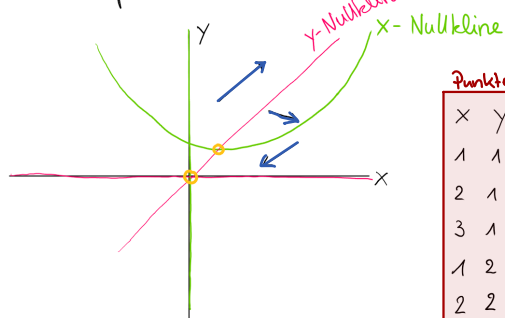
$$\dot{x} = 0 = \dot{y} \Leftrightarrow f_1(x, y) = 0 = f_2(x, y)$$

$x/y = 0$ setzen und in Nullklinen einsetzen

3) Vektorfeld

→ Nullklinen und Ggw-Punkte einzeichnen

Schnittpunkte der Nullklinen



Richtung von Pfeile →

$\dot{x} = f_1(x, y) > 0 \Rightarrow$ rechts
 $< 0 \Rightarrow$ links

$\dot{y} = f_2(x, y) > 0 \Rightarrow$ oben
 $\Rightarrow$ unten

Punkte auswerten = Vektoren

x	y	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$
1	1	x	x
2	1		
3	1		
1	2		
2	2		
3	2		

Um die Punkte auswerten zu können, müssen die Variablen der Funktion bestimmt werden. Diese dürfen frei gewählt werden z.B. $a=1, b=1, \dots$

Grundsätzlich reicht es einen Vektor-Pfeil zu bestimmen.

Anschließend ist jeweils ein Pfeil für den jeweiligen Bereich zu bestimmen, dies mittels eines Tricks wird eine jeweilige Nullkline überschritten so wechselt sich immer nur eine Voraussetzung:

• Unten, oben, rechts, links

Dazu muss klar definiert sein welche Nullkline welche ist: $\boxed{y}$ oder $\boxed{x}$ Nullkline

$y =$ Wechsel von unten, oben $x =$ Wechsel von rechts, links

Bsp. DG inkl. Vektorfeld

$$\dot{x} = xy \mid \dot{y} = 1 - x - y$$

1) Nullklinen: $\dot{x} = 0 \rightarrow x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

$$\dot{y} = 0 \rightarrow 1 - x - y = 0 \rightarrow y = 1 - x$$

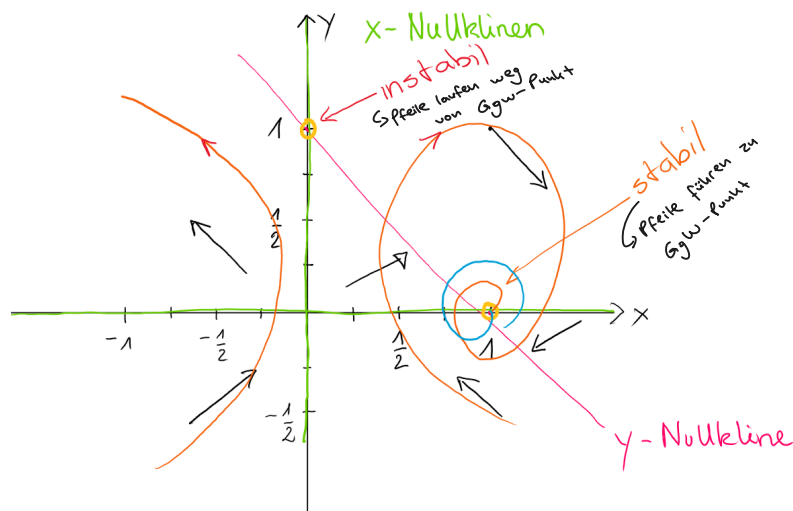
2) Ggw-Punkte: $x = 0 \rightarrow y = 1 - 0 \Leftrightarrow y = 1$

$$y = 0 \rightarrow 0 = 1 - x \Leftrightarrow x = 1$$

$$G_1(0|1) \text{ und } G_2(1|0)$$

Schnittpunkte

3) Vektorfeld - Nullklinen und Ggw-Punkte zeichnen



Bsp 2: Räuber - Beute

gegeben: $\dot{B} = a \cdot B \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - \beta \cdot R \cdot B$ $\dot{R} = \gamma \cdot R \cdot B - \delta \cdot R$

B und R dürfen natürlich wenn es einem dadurch einfacher fällt zu $\dot{x}$ und $\dot{y}$ umbenannt werden

1) Nullklinen

$$\dot{B} = 0 \rightarrow a \cdot B \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - \beta \cdot R \cdot B = 0$$

$$B \left[a \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - \beta \cdot R \right] = 0$$

$$B = 0 \text{ oder } a \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) - \beta \cdot R = 0$$

$$R = \frac{a}{\beta} \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) = \frac{a}{\beta} - \frac{a}{\beta B_{\max}} B$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{a}{\beta} - \frac{a}{\beta B_{\max}} \cdot x$$

Achsenabschnitt + Steigung

$$\dot{R} = 0 \Rightarrow R = 0 \text{ oder } B = \frac{\delta}{\gamma}$$

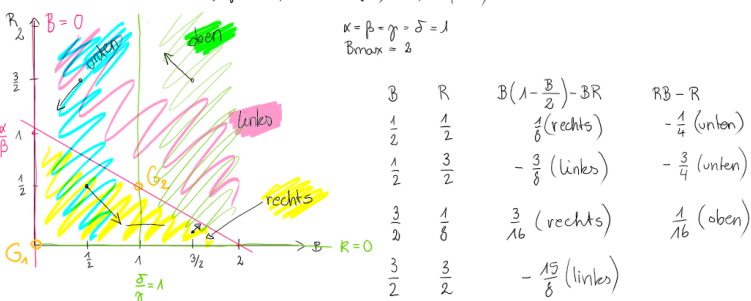
2. Schritt: Gleichgewichtspunkte + Vektorfeld

$$B = 0 \quad R = 0$$

$$R = \frac{a}{\beta} - \frac{a}{\beta B_{\max}} \cdot B \quad B = \frac{\delta}{\gamma}$$

$$B = \frac{\delta}{\gamma} \Rightarrow R = \frac{a}{\beta} - \frac{a}{\beta B_{\max}} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$G_1(0|0) \quad G_2\left(\frac{\delta}{\gamma} \mid \frac{a}{\beta} \left(1 - \frac{1}{B_{\max}} \frac{\delta}{\gamma}\right)\right) = \left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$$



1. $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases}$ Null setzen $\Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ z.B. $\begin{cases} \dot{y} = y(1-x-\frac{1}{2}y) \\ 0 = y(1-x-\frac{1}{2}y) \end{cases}$

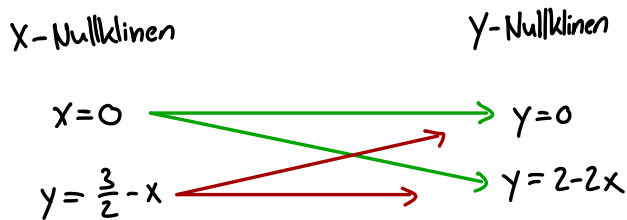
2. Nullstellen bestimmen (immer in Form $y=...$)

$y=0$ und $y=2-2x$

3. Schnittpunkte von x - und y -Nullklinen bestimmen
(Alle Nullklinen im vorgesehenen Muster anordnen)

Ziel ist es jede x -Nullklinen mit jeder y -Nullklinen zu ermitteln

Alle x -Nullklinen und y -Nullklinen rechts und links trennen



Schnittpunkte von $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ bestimmen

$x=0$, $y=0$	$S_1(0,0)$
$x=0$, $y=2-2x$	$S_2(0,2)$

$y=\frac{3}{2}-x$, $y=2-2x$	$S_3(\frac{1}{2},1)$
$y=\frac{3}{2}-x$, $y=0$	$S_4(\frac{3}{2},0)$

4. Vektor bestimmen (beliebigen punkt in f_1 & f_2 einsetzen)

$P(2,2)$

$\dot{x}: -2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 2 - 2\right) = 5 \Rightarrow$ positiv

$\dot{y}: -2 \cdot \left(1 - 2 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 4 \Rightarrow$ positiv



- $(+,+)$ bedeutet rechts oben
- $(+,-)$ bedeutet rechts unten
- $(-,+)$ bedeutet links oben
- $(-,-)$ bedeutet links unten

5. Weitere Punkte bestimmen oder mit Trick Richtung bestimmen

x = Wechsel von rechts, links y = Wechsel von unten, oben

$y=0$ — , $x=0$ |

Trick: DGL höherer Ordnung in 1. Ordnung

Ziel ist es immer die Form $z'(x) = f(x, z(x))$ zu erhalten.

Vorgehen:

1. Ordnung der DGL bestimmen

↳ $y''(x), y'''(x), y^{(n)}(x)$

2. Neue Variablen definieren

↳ $z_1(x) = y(x), z_2(x) = y'(x), z_3(x) = y''(x), z_4(x) = y^{(n)}(x)$

↳ Ordnung wird also zu Variablen-Index plus 1 oder anders gesagt: Ordnung minus 1 = Variablen-Index

3. Vektor $z(x)$ aufstellen

↳ $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$

4. Alle Komponenten ableiten

↳ $z'(x) = \begin{pmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ \vdots \\ z'_n(x) \end{pmatrix}$ es gilt: $z'_1(x) = z_2(x)$, $z'_2(x) = z_3(x)$ und $z'_n(x) = y^{(n)}(x)$

5. Höchste Ableitung ersetzen

↳ $z'_n(x) = y^{(n)}(x)$ und $y(x) \rightarrow z_1(x), y'(x) \rightarrow z_2(x), y''(x) \rightarrow z_3(x)$

6. System in Standardform notieren

↳ $z'(x) = f(x, z(x))$

1. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

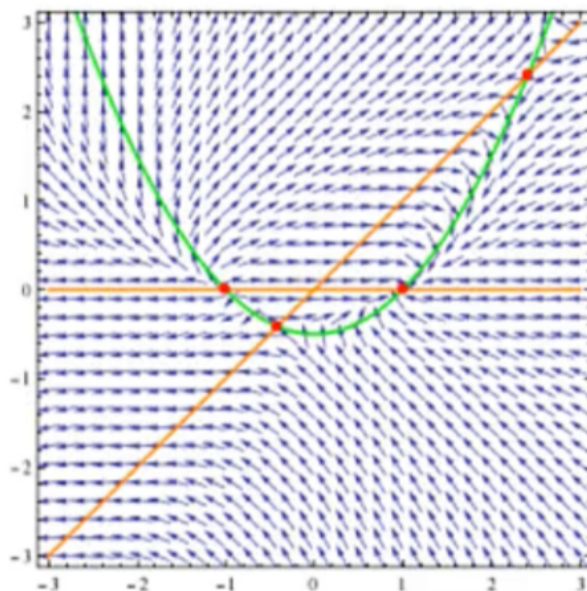
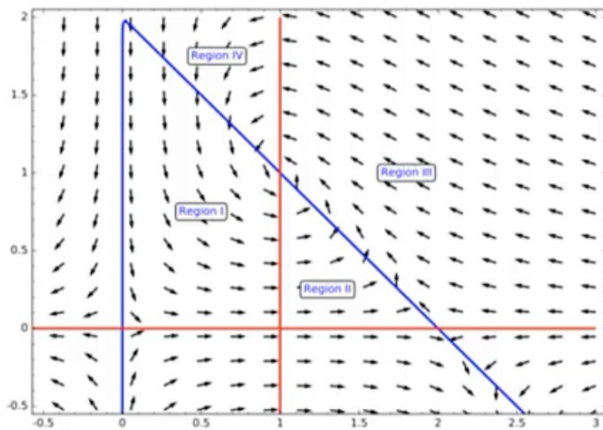
2. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

3. Ordnung

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ \text{rechte Seite der DGL} \end{pmatrix}$$

Diese Schritte dienen nur für das Verständnis



Beispiel Gegeben: $y'''(x) = 5x y''(x) - \sin(x) y'(x) - \cos(y(x))$

1. $y'''(x)$ 3. Ordnung

es werden also drei neue Variablen benötigt

2. $z_1(x) = y(x),$

$z_2(x) = y'(x),$ und $y'''(x)$ wird zu: $z'(x)$

$z_3(x) = y''(x).$

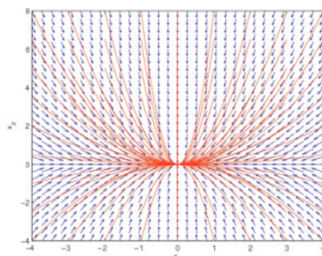
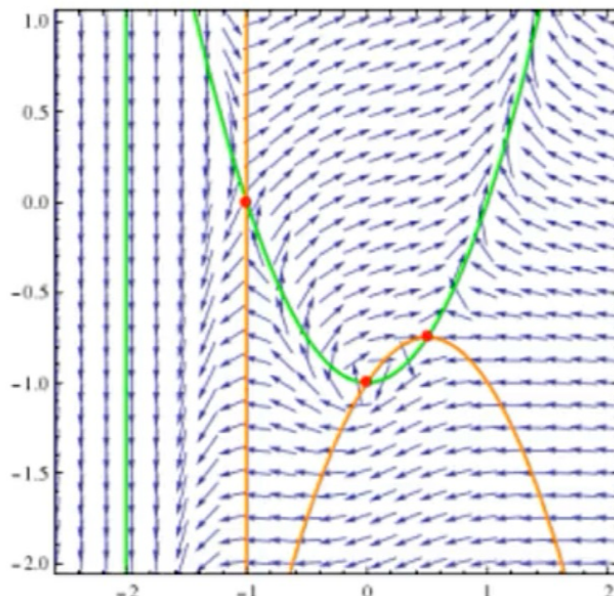
3. $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$

4. $z'(x) = \begin{pmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ z'_3(x) \end{pmatrix}$ da aber folgendes definiert wurde $z'_1(x) = y'(x)$ folgt: $z'_1(x) = z_2(x)$
 $z'_2(x) = y''(x)$ $z'_2(x) = z_3(x)$

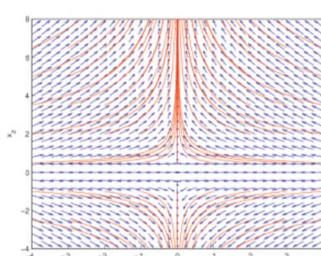
$$z'(x) = \begin{pmatrix} z'_1(x) \\ z'_2(x) \\ z'_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \text{rechte Seite der ursprünglichen DGL} \end{pmatrix}$$

5. $z'(x) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ 5x z_3(x) - \sin(x) z_1(x) z_2(x) - \cos(z_1(x)) \end{pmatrix}$ $y', y'' \dots y^{(n)}$ mit Variablen ersetzen ($z_n(x)$)

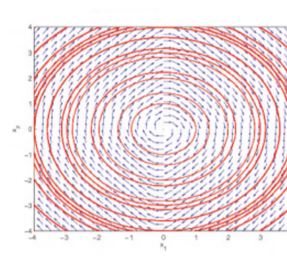
$y'''(x) = 5x y''(x) - \sin(x) y'(x) - \cos(y(x))$
 $z_{\text{Ordnung}+1}(x)$
 $y'' = z_{z+1} = z_3$



Gehen alle zum Gleichgewichts-Punkt hin stabil



Gehen vom Gleichgewichts-Punkt weg instabil



Weder noch neutral stabil

Zusatz I

Transport von Stoffen II

AWP bestimmen

Bsp. Zufluss in Tank

1) Bilanzgleichung: $\dot{V} = I_V \quad | \quad \dot{n} = I_n - \Pi_n$

2) Umformen: $n = c \cdot V \rightarrow \dot{n} = c \dot{V} + V \dot{c}$
Wenn c & V zeitabhängig?

$$\dot{V} = I_V$$

$$I_n = c_0 \cdot I_V$$

gewäss. Aufg. $-\Pi_n = V k \cdot c^2$

3) Gleichung aufstellen und auflösen

$$\dot{n} = I_n - \Pi_n \quad \hookrightarrow \text{gem. Aufgabe} = \dot{c}$$

$$c \dot{V} + c \dot{V} = c_0 I_V - V k c^2$$

$$\dot{c} = \frac{c_0 \cdot I_V - V k c^2 - c \dot{V}}{V} \quad \text{mit } C(0) = 0$$

[k] bestimmen

Einheit: $\Pi_n = V \cdot k \cdot c^2$
gemäß Ordnung

$$k = \frac{\Pi_n}{V \cdot c^2} = \frac{\frac{\text{mol}}{\text{s}}}{\text{m}^3 \cdot \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}} \rightarrow \text{kürzen: } \frac{1}{\text{s}}$$

Bsp. 2. Ord $\rightarrow c^2$

$$k = \frac{\Pi_n}{V \cdot c^2} = \frac{\frac{\text{mol}}{\text{s}}}{\text{m}^3 \cdot \left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right)^2} \Rightarrow \frac{\text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}}$$

W numerisch

$\hookrightarrow$ + finden wo $I_V = 0$ (Zufluss gestoppt)

$$k = \frac{\dot{c}}{c^2} \quad \text{Bsp. } k = \frac{\dot{c}(t)}{c^2(t)}$$

Weiteres

• Änderungsrate bei max. Wert = 0

$\hookrightarrow$ t bestimmen wann max. $\rightarrow c(t) = 0$

• Volumenstrom bestimmen (mit $\dot{n}$)

$$I_V = \dot{V} = A \cdot \dot{h}$$

Chemische Reaktion



Bilanzgl. der Kerne

$$\dot{n}_A = -\Pi_{n,1}$$

$$\dot{n}_B = \Pi_{n,1} - \Pi_{n,2}$$

$$\dot{n}_C = \Pi_{n,2}$$

"als Funktion der Reaktionsrate (Π_n)"

AWP "leiten sie das AWP her"

$$\begin{aligned} \Pi_{n,1} &= \lambda_1 \cdot n_A \\ \Pi_{n,2} &= \lambda_2 \cdot n_B \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Pi_{n,1} &= \lambda_1 \cdot n_A \\ \Pi_{n,2} &= \lambda_2 \cdot n_B \end{aligned}} \right\} \text{konstitutive Gleichungen}$$

Gleichung aufstellen nach Variable gem. Aufgabe

$$\dot{n}_B = \lambda_1 \cdot n_A - \lambda_2 \cdot n_B \quad \text{mit } n_B(0) = n_0$$

$\hookrightarrow$ "ACIP für Konzentration $c_x \rightarrow$ alles in c schreiben

$$\text{z.B.: } \Pi = k \cdot V \cdot c$$

"ACIP für Stoffmenge $n_x \rightarrow$ alles in n schreiben

$$\text{z.B.: } n = V \cdot c \Rightarrow c = \frac{n}{V} \rightarrow \Pi_x = k \cdot V \cdot \frac{n}{V} = \underline{k \cdot n}$$

"Welche Zustandsgröße steht links in der gesuchten Differentialgleichung?"

- $\dot{n} \rightarrow$ alles in Stoffmengen n
- $\dot{c} \rightarrow$ alles in Konzentrationen c
- $\dot{Q} \rightarrow$ alles in Ladungen Q
- $\dot{h} \rightarrow$ alles in Pegelhöhen h

Dann erhältst du automatisch die richtige Form des AWP.

Zerfallskonstante mit $\dot{n}$

$\hookrightarrow$ Zeiten finden wo Stoff kompl. aufgelöst + Anfang

$\hookrightarrow$ mit AWP bestimmen

$$n_B = \lambda_1 \cdot n_A - \lambda_2 \cdot n_B \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\dot{n}_B(0)}{n_A(0)}$$

Kerne = keine Einheit

Dynamische Systeme

Hydraulik

Bilanzgl: $\dot{V} = I_{V,i} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$
 $\dot{V} = A \cdot \dot{h}$

Konstante Bez.

$$V = C_V \cdot \Delta p_c \quad C_V: \text{Hyd. Kapazität} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{Pa}} \right]$$

$$\Delta p_c = \rho \cdot g \cdot h_e \quad \Delta p_c: \text{Druckdiff.} [\text{Pa}] \quad V = \text{Volumen} [\text{m}^3]$$

$$C_V = \frac{A}{\rho \cdot g} \quad \hookrightarrow \text{Euler}$$

$$I_V = G_V \cdot \Delta p_R$$

$$G = \frac{I_V}{h_2 - h_1} \quad \Delta p_R = \rho \cdot V \cdot I_V$$

Elektrik

Bilanzgl: $\dot{Q} = I_{Q,i} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{s}} \right]$
 $\dot{Q} = C_i \cdot \dot{U}$

Konst. Bez.

$$Q = C_i \cdot U_{C_i} \quad \begin{aligned} Q: & \text{Ladung [C]} \\ C: & \text{Kapazität [F]} \\ U_{C_i}: & \text{Spannung [V]} \end{aligned}$$

Widerstand

$$U_R = R \cdot I_R \quad \begin{aligned} R: & \text{Widerstand [\Omega]} \\ I_R: & \text{Stromstärke [A]} \end{aligned}$$

$$R = \frac{U_R}{I_R} \quad \left| \quad R = \frac{U_C}{\dot{Q}} \right. \quad \hookrightarrow \text{von Bilanzgl.}$$

Induktivität

$$U_{\text{Spule}} = U_{RL} + U_L$$

$$U_{\text{Spule}} = R_{\text{Spule}} \cdot I_Q$$

$$U_L = L \cdot \dot{I}_Q \quad \begin{aligned} L: & \text{elek. Indukt. [H]} \\ \dot{I}_Q: & \text{Änderungsrate} \left[\frac{\text{A}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

DGh herleiten:

Bsp:

$$\dot{I}_Q + \frac{R}{L} I_Q + \frac{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}{L} I_Q = 0 \rightarrow$$

1. Bilanzgleichungen für Q

2. Konstitutive Gleichungen für U

3. Maschensatz

4. Ableiten

5. Einsetzen und umformen

Aus

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{C1} - \dot{U}_{C2} - \dot{U}_R$$

wird:

$$L \dot{I}_Q = -\frac{I_Q}{C_1} - \frac{I_Q}{C_2} - R I_Q$$

Alles auf eine Seite bringen:

$$L \dot{I}_Q + R I_Q + \frac{I_Q}{C_1} + \frac{I_Q}{C_2} = 0$$

Jetzt I_Q ausklammern:

$$L \dot{I}_Q + R I_Q + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) I_Q = 0$$

Durch L teilen:

$$\dot{I}_Q + \frac{R}{L} I_Q + \frac{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}{L} I_Q = 0$$