

Bilanzieren:

$$\dot{G}(t) = \sum_i I_{G,i}(t) + \sum_j \Pi_{G,j}(t)$$

$G(t)$: extensive Größe (z. B. Masse, Energie, Impuls)

$\frac{dG(t)}{dt}$: Änderungsrate der Größe

$I_{G,i}(t)$: Flussrate über die Systemgrenze (Input/Output)

$\Pi_{G,j}(t)$: Produktions- oder Verbrauchsrate innerhalb des Systems

Mittlere Änderungsrate (linearer Zuwachs / Abnahme):

$$\frac{\Delta G_{t_1 \rightarrow t_2}}{\Delta t} = \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Impuls und Kraft

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

-> kann in x,y,z zerlegt werden

$\vec{p}$: Impuls [kg·m/s oder N·s]

m : Masse des Körpers [kg]

$\vec{v}$: Geschwindigkeit [m/s]

$$\vec{F}_{res} = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res}$$

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(t) = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(t)$$

1. Newton (Trägheit)
2. Newton (Zsmh. Kraft/Impuls)
3. Newton (Actio = Reactio)

Strecke-/ Zeitdiagramm

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$p = m \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\vec{p}$: Impuls [kg·m/s]

m : Masse des Körpers [kg]

Δs : zurückgelegte Strecke [m]

Δt : Zeitintervall [s]

Arbeit, Leistung & Energie

$$W_{F,s_1 \rightarrow s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

Arbeit = Kraft · Weg

$$P_F(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Leistung = Kraft · Geschwindigkeit

$$W_{F,t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_F(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Arbeit = Leistung über Zeit

$$\Delta E_{\text{kin},t_1 \rightarrow t_2} = W_{F_{\text{res}},t_1 \rightarrow t_2}$$

Kin. Energieänderung über Zeit

$$\dot{E}_{\text{mech}}(t) = \sum_i P_{F,i}(t)$$

$$\Delta E_{\text{kin},t_1 \rightarrow t_2} = \Delta p_{t_1 \rightarrow t_2} \cdot \frac{1}{2} (\Delta v_{t_1} + \Delta v_{t_2})$$

W_F : Arbeit der Kraft [J]

$\vec{F}(s)$: Kraftvektor als Funktion des Ortes s [N] · cos(φ) wenn Kraft in Winkel zu Weg

$d\vec{s}$: infinitesimales Wegstück (Vektor) [m]

s_1, s_2 : Anfangs- und Endpunkt der Bewegung entlang des Weges

$P_F(t)$: Leistung der Kraft zum Zeitpunkt t [W]

$\vec{F}(t)$: Kraftvektor als Funktion der Zeit [N]

$\vec{v}(t)$: Geschwindigkeitsvektor [m/s]

$$W = F \cdot v \cdot (t_2 - t_1)$$

Arbeit bei konstanter Kraft

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_{F_{\text{res}}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{res}}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Änderung kin. Energie von t(1) zu t(2) [J]

Arbeit der res. Kraft über Zeit t(1) zu t(2)

$\dot{E}_{\text{mech}}(t)$: Änderungsrate der mechanischen Energie [W]

$P_{F,i}(t)$: Leistung der i -ten Kraft zum Zeitpunkt t [W] $P_{F,i}(t) = \vec{F}_i(t) \cdot \vec{v}(t)$

$\vec{F}_i(t)$: Kraftvektor der i -ten Kraft [N]

$\vec{v}(t)$: Geschwindigkeit des Angriffspunkts [m/s]

$\Delta E_{\text{kin},t_1 \rightarrow t_2}$: Änderung der kinetischen Energie zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 .

$\Delta p_{t_1 \rightarrow t_2}$: Impulsänderung im Zeitraum $t_1 \rightarrow t_2$.

$\Delta v_{t_1}, \Delta v_{t_2}$: Geschwindigkeitsänderungen zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 .

$\frac{1}{2} (\Delta v_{t_1} + \Delta v_{t_2})$: Mittelwert der Geschwindigkeitsänderungen.

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mgh$$

Federenergie

$$E_{\text{feder}} = \frac{1}{2}Dx^2$$

D = Federkonstante

x = Federweg (gespannt - ungespannt)

Auftrieb und Luftwiderstand

$$\vec{F}_A = -m_{\text{Fl}} \cdot \vec{g}$$

Statische Auftriebskraft

$\vec{F}_A$: Auftriebskraft [N]

m_{Fl} : Masse des verdrängten Mediums [kg]

$$\vec{F}_{\text{Aero}} = \vec{F}_L + \vec{F}_D$$

$$\vec{F}_L \perp \vec{v}_\infty \text{ und } \vec{F}_D \parallel \vec{v}_\infty$$

Aerodynamische Kraft

$\vec{F}_{\text{Aero}}$: Gesamte aerodynamische Kraft auf ein Flugzeug oder Profil. [N]

$\vec{F}_L$: Auftriebskraft (Lift), senkrecht zur Anströmgeschwindigkeit $\vec{v}_\infty$. [N]

$\vec{F}_D$: Widerstandskraft (Drag), parallel zur Anströmgeschwindigkeit $\vec{v}_\infty$. [N]

$\vec{v}_\infty$: Anströmgeschwindigkeit (freie Strömungsgeschwindigkeit) [m/s]

ρ_∞ : Luftdichte der freien Strömung [kg/m³]

c_L : Auftriebsbeiwert (dimensionslos)

c_D : Widerstandsbeiwert (dimensionslos)

A: Bezugsfläche (meist Flügelgrundfläche) [m²]

$$F_L = \frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_L \cdot A$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_D \cdot A$$

$$q = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Dynamischer Druck

q = dynamischer Druck [Pa oder N/m²]

ρ = Luftdichte [kg/m³]

v = Strömungsgeschwindigkeit [m/s]

Kreisbewegungen und Trägheitskräfte

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

a_r = Radialbeschleunigung [m/s²]

v = Bahngeschwindigkeit [m/s]

r = Radius der Kreisbahn [m]

Rad.-Beschleunigung bei konst. Geschwindigkeit

$$s(t) = \theta(t) \cdot r$$

Bogenlänge

s(t) = Bogenlänge (entlang des Kreisbogens) [m]

$\theta(t)$ = Winkel im Bogenmaß (Radiant)

r = Radius der Kreisbahn [m]

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$

Momentane Winkelgeschwindigkeit

ω = momentane Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$\theta(t)$ = Winkel im Bogenmaß (Radiant)

$\dot{\theta}(t)$ = Ableitung des Winkels nach der Zeit

$$v = \omega \cdot r$$

v = Bahngeschwindigkeit (konstant) [m/s]

ω = Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

r = Radius der Kreisbahn [m]

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periodendauer v = konst.

T = Periodendauer [s]

r = Radius der Kreisbahn [m]

v = Bahngeschwindigkeit [m/s]

ω = Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

$\vec{a}(t)$ = Beschleunigungsvektor [m/s²] -> zeigt in die Kurvenmitte

ω = Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$\vec{r}(t)$ = Ortsvektor vom Kreismittelpunkt zum Punkt auf der Bahn [m]

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$$

$\vec{a}(t)$ = Gesamtbeschleunigung [m/s²]

$\vec{a}_t(t)$ = Tangentialbeschleunigung (durch Änderung der Geschwindigkeit)

$\vec{a}_r(t)$ = Radial- oder Zentripetalbeschleunigung (durch Richtungsänderung)

$$\vec{F}_{\text{res}}(t) = \underbrace{\vec{F}_{\text{res,t}}(t)}_{\text{tangential}} + \underbrace{\vec{F}_{\text{res,r}}(t)}_{\text{zentripetal}}$$

F_{res} = resultierende Gesamtkraft [N]

$F_{\text{res,t}}$ = Tangentiale Kraftkomponente (verändert die Geschwindigkeit)

$$F_{\text{res,t}} = m \cdot a_t = m \cdot \alpha \cdot r$$

$F_{\text{res,r}}$ = Radiale (zentripetale) Kraftkomponente (hält die Kreisbahn)

$$F_{\text{res,r}} = m \cdot a_r = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

konst. Bewegung

$$F_{\text{res}} = F_{\text{res,r}} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

nicht konst. Bewegung

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_{\text{res,t}}^2 + F_{\text{res,r}}^2}$$

Gravitation und Trägheitsfeld

$$\vec{F}_{G,12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Newtons Gravitationsgesetz

$\vec{F}_{G,12}$ = Gravitationskraft, die Masse 1 auf Masse 2 ausübt [N]
 G = Gravitationskonstante $G \approx 6,674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$
 m_1, m_2 = Massen der beiden Körper [kg]
 $\vec{r}_{12}$ = Ortsvektor von Masse 1 zu Masse 2
 r_{12} = Abstand zwischen den beiden Massen [m]

$$|\vec{F}_{G,12}| = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Betrag Gravitationskraft

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Gravitationsfeldstärke

$\vec{g}(\vec{r})$ = Gravitationsfeldstärke am Ort $\vec{r}$ [m/s²]
 M = Masse des Zentralkörpers [kg]
 $\vec{r}$ = Ortsvektor vom Zentrum zum Punkt
 r = Abstand vom Zentrum [m]

$$\vec{g}_{\text{träg}} = -\vec{a}_S$$

Trägheitsfeld, bes. System

$\vec{g}_{\text{träg}}$ = Trägheitsbeschleunigung, scheinbare Beschleunigung im beschleunigten System [m/s²]
 $\vec{a}_S$ = Beschleunigung des Bezugssystems [m/s²]

$$\vec{g}_{\text{lokal}} = \vec{g} + \vec{g}_{\text{träg}}$$

lok. Gravitationsfeld bes. Sys.

$\vec{g}_{\text{lokal}}$ = lokale Schwerebeschleunigung (effektive Beschleunigung, die ein Körper spürt) [m/s²]
 $\vec{g}$ = Gravitationsbeschleunigung (z. B. durch Erde) [m/s²]
 $\vec{g}_{\text{träg}}$ = Trägheitsbeschleunigung [m/s²]

$$\vec{F}_{ZF} = m \omega^2 r \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Zentrifugalkraft

$\vec{F}_{ZF}$ = Zentrifugalkraft [N]
 m = Masse des Körpers [kg]
 ω = Winkelgeschwindigkeit [rad/s]
 r = Abstand vom Rotationszentrum [m]
 $\vec{r}$ = Ortsvektor vom Zentrum zum Körper
 $\frac{\vec{r}}{r}$ = Einheitsvektor in Richtung des Radius (zeigt nach außen)

$$F_{ZF} = m \omega^2 r$$

Betrag Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Corioliskraft

$\vec{F}_C$ = Corioliskraft [N]
 m = Masse des Körpers [kg]
 $\vec{\omega}$ = Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Bezugssystems [rad/s]
 $\vec{v}$ = Geschwindigkeit des Körpers relativ zum rotierenden Bezugssystem [m/s]

$$F_C = 2m \cdot \omega v \cdot \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{v})$$

Betrag Corioliskraft

Offene Systeme - Energiebilanz

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

Bernoulli

p : statischer Druck [Pa]
 ρ : Dichte des Fluids [kg/m³]
 v : Strömungsgeschwindigkeit [m/s]
 g : Erdbeschleunigung [9.81 m/s²]
 h : Höhenlage/-differenz [m]

$$\frac{1}{2} \rho v^2$$

dynamischer Druck/ Staudruck [Pa]

$$\rho g h$$

hydrostatischer Druck [Pa]
 (Schweredruck)

$$I_{V1} = A_1 \cdot v_1$$

Volumenstrom

I_{V1} : Volumenstrom [m³/s]
 A_1 : Querschnittsfläche [m²]
 v_1 : mittlere Strömungsgeschwindigkeit [m/s]
 I_{Ep1} : Energiestrom durch Druck [W]
 I_{Ekin1} : kinetischer Energiestrom [W]
 I_{EpotG1} : potenzieller Energiestrom [W]

$$I_{Ep1} = p_1 \cdot I_{V1}$$

konvektiver Energiestrom

$$I_{Ekin1} = \frac{1}{2} \rho I_{V1} v_1^2$$

Kin. Energiestrom

$$I_{EpotG1} = \rho I_{V1} g h_1$$

Pot. Energiestrom

$$v_x = \sqrt{2gh_1}$$

Ausfluss unter Gravitation

v_x : Ausflussgeschwindigkeit [m/s]
 h_1 : Höhe der Flüssigkeitssäule über der Austrittsöffnung [m]

$$p_3 = p_U + \rho g h_3 - \frac{1}{2} \rho v_3^2$$

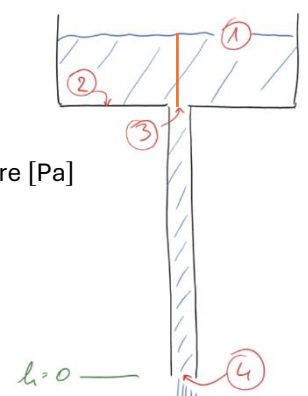
Abs. Druck bei untersch. Rohrdurchmesser

$$p_3 = p_U - \rho g h_3$$

Abs. Druck bei gleichem Durchmesser

p_3 : Druck am Punkt 3 [Pa]
 p_U : Überdruck oder Umgebungsdruck / Atmosphäre [Pa]
 ρ : Dichte des Fluids [kg/m³]
 g : Erdbeschleunigung [9.81 m/s²]
 h_3 : Höhe der Flüssigkeitssäule [m]
 d_4, d_3 : Rohrdurchmesser [m]

$$v_1 \cdot A_1 \cdot p_1 = v_2 \cdot A_2 \cdot p_2$$



$$\dot{I}_{x,i} = p_i A_i + \rho_i A_i v_i^2$$

Impulsstrom (horizontal/vertikal)

$\dot{I}_{x,i}$: Impulsstrom in x-Richtung am Ort i [N, kg*m/s²]

p_i : Statischer / absoluter Druck am Ort i [Pa = N/m²]

A_i : Querschnittsfläche am Ort i [m²]

ρ_i : Dichte des Mediums am Ort i [kg/m³]

v_i : Strömungsgeschwindigkeit am Ort i [m/s]

Offene Systeme - Impulsbilanz

$$\sum_i \vec{F}_{\text{Ob},i} + \sum_i \vec{F}_{\text{K},i} + \sum_i \vec{I}_{p,\text{konv},i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impulsbilanz – offenes System

$\vec{F}_{\text{Ob},i}$: Oberflächenkraft [N] (Reibung)

$\vec{F}_{\text{K},i}$: Körperkraft [N] (Fg)

$\vec{I}_{p,\text{konv},i}$: konvektiver Impulsstrom [N] ->

$\vec{p}$: Impuls im Kontrollvolumen [kg*m/s]

t : Zeit [s]

$$\vec{I}_{p,\text{konv}} = I_m \cdot \vec{v}_m$$

I_m : Massenstrom [kg/s]

$\vec{v}_m$: Ges. Massenstroms [m/s]

$$v_z(m) = c \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Raketengleichung

$v_z(m)$: Geschwindigkeit der Rakete [m/s]

c : effektive Ausströmgeschwindigkeit Gase [m/s]

m_0 : Anfangsmasse der Rakete (inkl. Treibstoff) [kg]

m : aktuelle Masse der Rakete [kg]

$$\dot{m}(t) = \sum_i I_{m,i}(t)$$

$\dot{m}(t)$: zeitliche Änderung Masse [kg/s]

$I_{m,i}(t)$: M-strom über die Sys.grenze [kg/s]

$\sum_i$: Summe aller Ein- und Auslässe

$$F_{\text{Schub}} = I_m \cdot (v_{\text{out}} - v_{\text{in}})$$

Schub Strahltriebwerk

$$P = \frac{v_{\text{out}} + v_{\text{in}}}{2} \cdot F_{\text{Schub}}$$

Leistung Strahltriebwerk

$$F_{\text{Schub}} = \underbrace{I_{m,K} \cdot (v_{\text{out},K} - v_{\text{in}})}_{\text{Schub Triebwerk allein}} + \underbrace{I_{m,M} \cdot (v_{\text{out},M} - v_{\text{in}})}_{\text{Zusatzschub Mantel}}$$

F_{Schub} : Gesamtschubkraft [N]

$I_{m,K}$: Massenstrom des Kerntriebwerks [kg/s]

$v_{\text{out},K}$: Austrittsgeschwindigkeit des Kernstroms [m/s]

$I_{m,M}$: Massenstrom des Mantelstroms (Bypass) [kg/s]

$v_{\text{out},M}$: Austrittsgeschwindigkeit des Mantelstroms [m/s]

v_{in} : Eintrittsgeschwindigkeit (Fluggeschwindigkeit) [m/s]

Starre Körper - Ebene Rotation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

Ortsvektor

$\vec{r}(t)$: Ortsvektor als Funktion der Zeit

$x(t), y(t)$: Koordinaten in der Ebene

r : Radius des Kreises (konstant bei gleichförmiger Kreisbewegung)

$\theta(t)$: Winkelposition als Funktion der Zeit (z. B. $\theta(t) = \omega t$ bei gleichförmiger Drehung)

$$n_{\text{U/min}} = \omega \cdot \frac{60}{2\pi}$$

Umdrehungen/min

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor

$\vec{v}(t)$: Geschwindigkeitsvektor [m/s]

r : Radius des Kreises [m]

$\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$\theta(t)$: Winkelposition [rad]

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

Mom. Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

Geschwindigkeitsvektor

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = r \cdot |\omega(t)|$$

Betrag Geschwindigkeitsvektor

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Winkelbeschleunigung [rad/s²]

$$\vec{a}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

Beschleunigungsvektor

$\vec{a}(t)$: Beschleunigungsvektor [m/s²]

r : Radius des Kreises [m]

ω : Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$\theta(t)$: Winkelposition [rad]

$$a(t) = \|\vec{a}(t)\| = r \cdot \omega^2$$

Betrag Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$$

Zerlegung Bes. Vektor

$$a_t(t) = \|\vec{a}_t(t)\| = r \cdot |\dot{\omega}(t)| \quad a_t = \frac{dv_t}{dt} = \alpha r$$

$$a_r(t) = \|\vec{a}_r(t)\| = r \cdot \omega^2(t) \quad a_r = \frac{v_t^2}{r} = \omega^2 r$$

Tangential-Beschleunigung

Radial-Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{a}_t(t)} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{=\vec{a}_r(t)}$$

Kreuzprodukt – Darstellung der Beschleunigung

Massenmittelpunkt

$$\vec{r}_{\text{MMP}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k$$

Mehrteilchensystem

m_k : Masse des k -ten Punktes
 $\vec{r}_k$: Ortsvektor des k -ten Punktes
 m : Gesamtmasse des Systems

$$\vec{r}_{\text{MMP}} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV$$

Homogenes System

$\rho(\vec{r})$: Dichteverteilung [kg/m^3]
 dV : Volumenelement [m^3]
 V : Ges. Volumen Körper

$$\vec{r}_{\text{MMP}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_{\text{MMP},i}$$

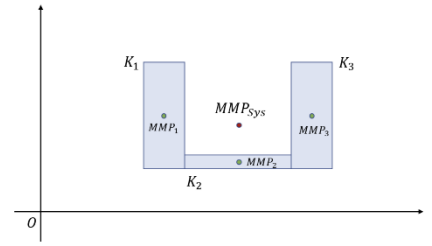
Mehrkörpersystem

$\vec{r}_{\text{MMP}}$: Gesamter Massenmittelpunkt des Systems
 m : Gesamtmasse des Systems
 m_i : Masse des i -ten Teilkörpers
 $\vec{r}_{\text{MMP},i}$: Massenmittelpunkt des i -ten Teilkörpers

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{\text{MMP}}) = m \cdot \vec{a}_{\text{MMP}}$$

Dynamik Massenmittelpunkt

$\sum \vec{F}_{\text{ext}}$: Summe aller äußeren Kräfte auf das System
 $\vec{r}_{\text{MMP}}$: Ortsvektor des Massenmittelpunktes
 $\frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{\text{MMP}})$: Beschleunigung des Massenmittelpunktes
 $\vec{a}_{\text{MMP}}$: Beschleunigung des Massenmittelpunktes

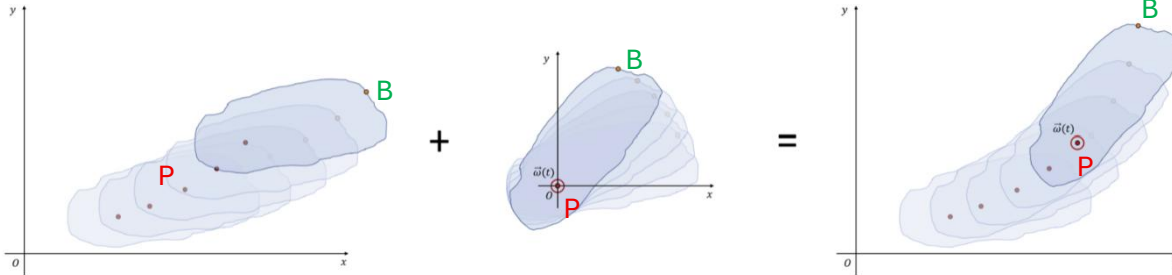


Starre Körper – allgemeine ebene Bewegung

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t)$$

$\vec{v}$ Punkt B in Abhängigkeit von P

$\vec{v}_B(t)$: Geschwindigkeit des Punktes B
 $\vec{v}_P(t)$: Geschwindigkeit eines Referenzpunktes P
 $\vec{\omega}(t)$: Winkelgeschwindigkeitsvektor des Körpers
 $\vec{r}_{PB}(t)$: Ortsvektor von P zu B



$$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_P(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}_{PB}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t))$$

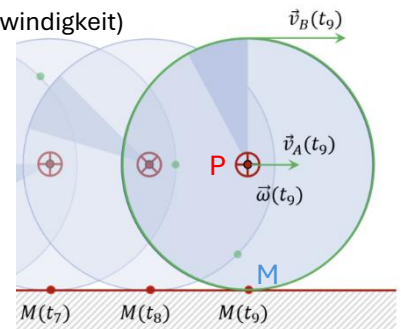
$\vec{a}$ Punkt B in Abhängigkeit von P

$\vec{a}_B(t)$: Beschleunigung des Punktes B
 $\vec{a}_P(t)$: Beschleunigung des Referenzpunktes P
 $\dot{\vec{\omega}}(t)$: Winkelbeschleunigung (Ableitung der Winkelgeschwindigkeit)
 $\vec{\omega}(t)$: Winkelgeschwindigkeit
 $\vec{r}_{PB}(t)$: Ortsvektor von P zu B

$$\vec{r}_{PM}(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_P(t)}{\omega^2(t)}$$

Ort Momentanpol zu P

$\vec{r}_{PM}(t)$: Ortsvektor vom Punkt P zum Momentanpol M
 $\vec{\omega}(t)$: Winkelgeschwindigkeitsvektor [rad/s]
 $\vec{v}_P(t)$: Geschwindigkeit des Referenzpunktes P [m/s]
 $\omega^2(t)$: Quadrat des Betrags der Winkelgeschwindigkeit



Das Drehmoment

$$\vec{M}_{\vec{F}_Q, P} = \vec{r}_{PQ} \times \vec{F}_Q$$

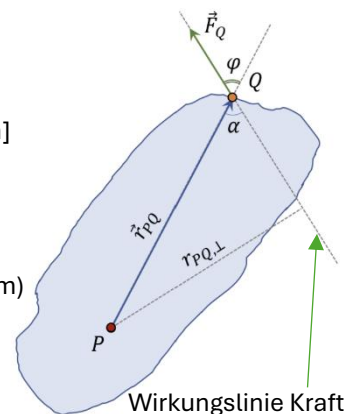
Drehmoment = Kraft * Arm

$\vec{M}_{\vec{F}_Q, P}$: Moment der Kraft $\vec{F}_Q$ um den Punkt P [Nm]
 $\vec{r}_{PQ}$: Ortsvektor vom Rotationspunkt P zum Angriffspunkt Q der Kraft [m]
 $\vec{F}_Q$: Kraftvektor [N]

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_Q, P} = r_{PQ} \cdot F_Q \cdot \sin \angle(\vec{r}_{PQ}, \vec{F}_Q) = F_Q \cdot r_{PQ, \perp}$$

$\sin \angle(\vec{r}_{PQ}, \vec{F}_Q)$: Sinus des Winkels Hebelarm und Kraft
 $r_{PQ, \perp}$: Senkr. Abstand der Wirkungslinie zu P (Hebelarm)

Betrag Drehmoment



$$\vec{M}_{\text{res}, P} = \sum_i \vec{M}_{i, P}$$

$\vec{M}_{\text{res}, P}$: Resultierendes Moment um den Punkt P
 $\vec{M}_{i, P}$: Einzelmomente der Kräfte um den Punkt P
 $\sum_i$: Summe über alle wirkenden Kräfte

Drehmoment und Drehimpuls

Satz von Steiner

$$\vec{L}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p}$$

Drehimpuls

$\vec{L}_P$: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich des Punktes P

$\vec{r}_{PQ}$: Ortsvektor vom Bezugspunkt P zum Punkt Q (Teilchenposition)

$\vec{p}$: Linearer Impuls des Teilchens, $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$J_d = J_{MMP} + m \cdot d^2$$

m : Masse

d : Abstand ω zu MMP

J_{MMP} : J durch MMP Objekt

$$L_{\vec{\omega}} = J_{\vec{\omega}} \cdot \omega$$

Drehimpulskomponente

$L_{\vec{\omega}}$: Drehimpuls bez. ω [Nms, kg · m²/s]

$J_{\vec{\omega}}$: Trägheitsmoment um die Rotationsachse ω [kg · m²]

ω : Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$J_{\vec{\omega}} = \sum_i m_i \cdot r_{i,\perp}^2$$

Massenträgheitsmoment

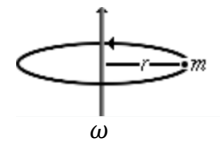
$J_{\vec{\omega}}$: Trägheitsmoment um die Rotationsachse ω [kg · m²]

m_i : Masse des i-ten Teilchens [kg]

$r_{i,\perp}$: Abstand des i-ten Teilchens von der Rotationsachse ω [m]

$$J_{MMP} = m \cdot r^2$$

Trägheitsmom. Punktmasse



$$\vec{L}_{HTA} = J_{HTA} \cdot \vec{\omega}$$

Drehimpuls Hauptträg.-achse

$\vec{L}_{HTA}$: Drehimpuls um die Hauptträgheitsachse [Nms, kg · m²/s]

J_{HTA} : Trägheitsmoment um die Hauptträgheitsachse [kg · m²]

$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$\vec{L}_{MMP}^{Eigen} = J_{MMP} \cdot \vec{\omega}$$

Eigendrehimpuls

$\vec{L}_{MMP}^{Eigen}$: Eigen-Drehimpuls um den Massenmittelpunkt [Nms, kg · m²/s]

J_{MMP} : Trägheitsmoment bez. Massenmittelpunkt [kg · m²]

$$\dot{\vec{L}}_P = \sum \vec{M}_{ext,P}$$

Drehimpulsänderung

$\dot{\vec{L}}_P$: zeitliche Änderung des Drehimpulses um den Punkt P [N·m, kg·m²/s²]

$\vec{M}_{ext,P}$: äusseres Drehmoment um den Punkt P [N·m]

P : Bezugspunkt / Drehpunkt (Lager, Ursprung, Massenmittelpunkt)

$$\sum \vec{M}_{ext} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

Summe Drehmomente

J : Trägheitsmoment des Körpers [kg·m²]

$\dot{\omega}$: Winkelbeschleunigung [rad/s²]

$\vec{M}_{ext}$: äusseres Drehmoment um den Punkt P [N·m]

2tes Newton'sches Gesetz Rotation

$J = \text{const. und bez. Fixpunkt oder MMP}$

$$\sum \vec{M}_{ext,P} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}}_P = 0 \Rightarrow \vec{L}_P = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung

P unbeschleunigt oder $P = MMP$

Drehimpuls und Energie

Leistung Drehmoment

$$W_{kin,rot} = \frac{1}{2} \cdot J_{\vec{\omega}} \cdot \omega^2$$

Kin. Rotationsenergie

$W_{kin,rot}$: kinetische Rotationsenergie [J]

$J_{\vec{\omega}}$: Trägheitsmoment um Rotationsachse ω [kg·m²]

ω : Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$P_{\vec{M}} = \vec{M}_{\vec{F}} \cdot \vec{\omega}$$

$P_{\vec{M}}$: Leistung des Drehmoments [W]

$\vec{M}_{\vec{F}}$: Drehmoment der Kraft $\vec{F}$ [N·m]

ω : Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$W_{\vec{M}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}_{\vec{F}}(\theta) \cdot d\theta$$

Arbeit Drehmoment

$W_{\vec{M}}$: Arbeit des Drehmoments [J]

$\vec{M}_{\vec{F}}(\theta)$: Drehmoment als Funktion des Winkels θ [N·m]

θ : Winkel [rad], θ_1 : Anfangswinkel [rad], θ_2 : Endwinkel [rad]

$d\theta$: infinitesimale Winkeländerung [rad]

$$P_{PS} = \frac{P_W}{735,5}$$

Watt zu PS umrechnen

$$W_{\vec{M}} = \Delta W_{kin,rot}$$

Arbeit Drehmoment

$W_{\vec{M}}$: Arbeit des Drehmoments $\vec{M}$ [J]

$\Delta W_{kin,rot}$: Änderung der kin. Rotationsenergie [J]

$$W_{kin} = W_{kin,trans,MMP} + W_{kin,rot,MMP}$$

Kin. Energie rot. & trans. Bewegung

W_{kin} : gesamte kinetische Energie [J]

$W_{kin,trans,MMP}$: translatorische kinetische Energie des Massenmittelpunkts [J]

$W_{kin,rot,MMP}$: rotatorische kinetische Energie um den Massenmittelpunkt [J]

m : Masse des Körpers [kg]

v_{MMP} : Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts [m/s]

J_{MMP} : Trägheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunkts [kg·m²]

ω : Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{MMP}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{MMP} \cdot \omega^2$$

Eigen- und Bahndrehimpuls

$\vec{L}_O$: gesamter Drehimpuls des Körpers um Punkt O [kg·m²/s]

$\vec{L}_O^{\text{Bahn}}$: Bahndrehimpuls des Massenmittelpunkts um Punkt O [kg·m²/s]

$\vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}}$: Eigendrehimpuls um den Massenmittelpunkt (Spin) [kg·m²/s]

O: Bezugspunkt (z.B. Ursprung, Drehpunkt)

MMP: Massenmittelpunkt des Körpers

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\text{Bahn}} + \vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}}$$

Ges. Drehimpuls

$$\vec{L}_O^{\text{Bahn}} = \vec{r}_{\text{MMP}} \times m \cdot \vec{v}_{\text{MMP}}$$

Bahndrehimpuls

$\vec{L}_O^{\text{Bahn}}$: Bahndrehimpuls des Körpers um Punkt O [kg·m²/s]

$\vec{r}_{\text{MMP}}$: Ortsvektor vom Punkt O zum Massenmittelpunkt [m]

m : Masse des Körpers [kg]

$\vec{v}_{\text{MMP}}$: Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts [m/s]

$$\vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}} = J \cdot \vec{\omega}$$

Eigendrehimpuls

$\vec{L}_{\text{MMP}}^{\text{Eigen}}$: Eigendrehimpuls (Spin) um den Massenmittelpunkt MMP [kg·m²/s]

J : Trägheitsmoment des Körpers um die Rotationsachse durch den Massenmittelpunkt [kg·m²]

$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit des Körpers [rad/s]

Energieübertragung eines Zweikörpersystems

$$\Delta E_{I \rightarrow F} = \Delta p \cdot \frac{1}{2} (\Delta v_I + \Delta v_F)$$

Kin. Energieübertragung

$\Delta E_{I \rightarrow F}$: Änderung der gemeinsamen kinetischen Energie von Anfang I zu Ende F [J]

Δp : ausgetauschte Impulsmenge zwischen den beiden Teilsystemen [kg·m/s]

Δv_I : Relativgeschwindigkeit der beiden Teilsysteme **vor** dem Austausch [m/s]

Δv_F : Relativgeschwindigkeit der beiden Teilsysteme **nach** dem Austausch [m/s]

$$\Delta E_{I \rightarrow F} = \Delta L \cdot \frac{1}{2} (\Delta \omega_I + \Delta \omega_F)$$

Rot. Energieübertragung

$\Delta E_{I \rightarrow F}$: Änderung der gemeinsamen Rotationsenergie von Anfang I zu Ende F [J]

ΔL : ausgetauschte Drehimpulsmenge zwischen beiden rotierenden Teilsystemen [kg·m²/s]

$\Delta \omega_I$: Winkelgeschwindigkeitsdifferenz der beiden Teilsysteme **vor** dem Austausch [rad/s]

$\Delta \omega_F$: Winkelgeschwindigkeitsdifferenz der beiden Teilsysteme **nach** dem Austausch [rad/s]

Schwenkbewegungen

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{\text{MMP}}}{L}$$

Winkelg. Kreiselssystem

Ω : Präzessionswinkelgeschwindigkeit des Kreisels [rad/s]

m : Masse des Kreisels [kg]

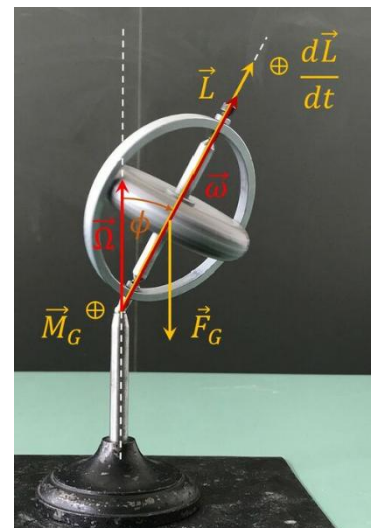
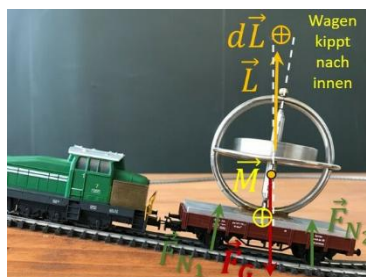
g : Erdbeschleunigung $\approx 9,81 \text{ m/s}^2$ [m/s²]

r_{MMP} : Abstand Massenmittelpunkt vom Auflagepunkt / Drehpunkt [m]

L : Betrag des Drehimpulses des Kreisels um den Drehpunkt [kg·m²/s]

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Drehmomentvektor -> senkrecht auf L und Ω



Kinematik

Beschleunigung

Geschwindigkeit über Zeit

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{a}$ = Beschleunigungsvektor [m/s²]
 $\Delta \vec{v}$ = Geschwindigkeitsänderung [m/s]
 Δt = Zeitintervall [s]

Gleichmässige Beschleunigung

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s}$$

v = Endgeschwindigkeit
 v_0 = Anfangsgeschwindigkeit
 s = zurückgelegter Weg

Beschleunigung aus res. Kraft

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$$

$\vec{F}_{\text{res}}$ = resultierende Kraft [N]
 m = Masse [kg]

Geschwindigkeit

Weg über Zeit

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

$\vec{v}$ = Geschwindigkeitsvektor [m/s]
 $\Delta \vec{s}$ = Ortsänderung (Weg) [m]
 Δt = Zeitintervall [s]

Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ = Anfangsgeschwindigkeit
 $\vec{a}$ = konstante Beschleunigung

Energiebetrachtung

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

E_k = kinetische Energie
 m = Masse

Impulsbetrachtung

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$\vec{p}$ = Impulsvektor
 m = Masse

Geschwindigkeit – Weg

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

a = Beschleunigung [m/s²]
 s = zurückgelegte Strecke [m]

Freier Fall

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad v = gt$$

g = Gravitationsbeschleunigung
-> kann auch **a** sein

Körperformeln

Zylinder (Vollzylinder)

- Volumen:
 $V = \pi r^2 h$
- Mantelfläche:
 $A_M = 2\pi r h$
- Gesamte Oberfläche:
 $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Parameter:

- r : Radius der Grundfläche [m]
- h : Höhe [m]

Kugel

- Volumen:
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Oberfläche:
 $A = 4\pi r^2$

Kegel

- Volumen:
 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Mantelfläche:
 $A_M = \pi r s$
- Gesamte Oberfläche:
 $A = \pi r^2 + \pi r s$

Parameter:

- s : Mantellinie (schräge Höhe) [m]

Pyramide (Beliebige Grundfläche)

- Volumen:
 $V = \frac{1}{3}A_G h$

Parameter:

- A_G : Grundfläche [m²]
- h : senkrechte Höhe [m]

Kreiszyylinder-Ring (Rohr)

- Volumen:
 $V = \pi(R^2 - r^2)h$

Parameter:

- R : Außenradius [m]
- r : Innenradius [m]

Kreis & Grundflächen (für 2D)

- Kreisfläche:
 $A = \pi r^2$
- Kreisumfang:
 $U = 2\pi r$
- Rechteck:
 $A = ab$
- Dreieck:
 $A = \frac{1}{2}gh$